Laboratorio di inferenza statistica (2020-2021)

Prova finale – 1 luglio 2021

Name, Personal Code (Matricola): ______________________________

IMP.: per tutti gli esercizi riportare risposte numeriche e codice R

1. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1 \ldots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\text{Esp}(\theta) = \text{Ga}(1, \texttt{scale} = \theta)$. Si consideri il seguente campione di dati osservati:
$$\mathbf{x}_n = (2, 4, 1, 6, 3).$$
Calcolare il valore di $L(\theta_1)/L(\theta_2)$ e stabilire se è più verosimile il valore $\theta_1 = 2.9$ o $\theta_2 = 3.3$.

2. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1 \ldots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\text{Esp}(\theta, 1)$. Si consideri il campione di dati osservati in cui $n = 20$ e $\sum_{i=1}^n x_i = 40$. Determinare l'insieme di verosimiglianza **asintotico** di livello $q = 0.8$.

3. Si considerino modello $\text{N}(\theta, 1)$ e il campione osservato $\mathbf{x}_n = (-1.00, 0.04, 1.03, 0.83, 0.26, 0.21, -0.32, 0.90, -0.60, 1.80)$
   (a) Fornire stima puntuale e intervallo di confidenza di livello 0.95 per θ.
   (b) Si consideri il sistema di ipotesi
   $$H_0 : \theta = 0 \qquad H_1 : \theta \neq 0.$$
   Sottoporre a verifica l'ipotesi in un test di ampiezza $\alpha = 0.05$ e dire se H_0 viene accettata o meno.
   (c) Per il test precedente, fornire il valore della statistica test e del p-value.

4. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1 \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (entrambi incogniti). Si consideri l'intervallo di confidenza per μ definito da:

$$C = [\mathrm{Med}(\mathbf{X}) - 1/2, \mathrm{Med}(\mathbf{X}) + 1/2].$$

Calcolare con Monte Carlo la probabilità di copertura di C assumendo $n = 15$, $\mu = 3$, $\sigma^2 = 1$ (fissare $M = 10000$).

5. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1 \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\mathrm{Ber}(\theta)$. Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = 0.3 \qquad H_1 : \theta = 0.5.$$

Si consideri la regione di rifiuto del test

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > 3.5 \right\},$$

Supponendo che $n = 10$, calcolare con Monte Carlo (M=10000):

(a) probabilità di errore di I tipo;

(b) probabilità di errore di II tipo;

(c) potenza.