

Name, Personal Code (Matricola): \_\_\_\_\_

IMP.: per tutti gli esercizi riportare risposte numeriche e codice R

1. Sia  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  un campione i.i.d. da  $EN(\theta) = \text{Ga}(1, \text{rate} = \theta)$ . Si consideri il seguente campione di dati osservati:

$$\mathbf{x}_n = (0.7, 0.8, 0.9, 0.5).$$

Calcolare il valore di  $L(\theta_1)/L(\theta_2)$  e stabilire se è più verosimile il valore  $\theta_1 = 1$  o  $\theta_2 = 2$  e calcolare il valore di  $L(\theta_1)/L(\theta_2)$ .

2. Sia  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  un campione i.i.d. da  $N(\theta, 1)$ . Si consideri il seguente campione di dati osservati:

$$\mathbf{x}_n = (2.81, 0.14, 2.08, 1.30, 2.95, 1.93, 2.09, 2.40, -0.22, 1.04).$$

Determinare l'insieme di verosimiglianza di livello  $q = 0.7$ .

3. Si considerino modello e dati dell'esercizio precedente.

(a) Fornire stima puntuale e intervallo di confidenza di livello 0.95 per  $\theta$ .

(b) Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = 0 \quad H_1 : \theta \neq 0.$$

Sottoporre a verifica l'ipotesi in un test di ampiezza  $\alpha = 0.05$  e dire se  $H_0$  viene accettata o meno.

(c) Per il test precedente, fornire il valore della statistica test e del p-value.

4. Sia  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  un campione i.i.d. da  $N(\mu, \sigma^2)$  (entrambi incogniti). Si consideri l'intervallo di confidenza per  $\sigma^2$  definito da:

$$C = [S_n^2 - 1/2, S_n^2 + 1/2].$$

Calcolare con Monte Carlo la probabilità di copertura di  $C$  assumendo  $n = 10$ ,  $\mu = 2$ ,  $\sigma^2 = 1$  (fissare  $M = 10000$ ).

5. Sia  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  un campione i.i.d. da  $\text{Pois}(\theta)$ . Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = 1 \quad H_1 : \theta = 2.$$

Si consideri la regione di rifiuto del test

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i > 15 \right\},$$

Supponendo che  $n = 10$ , calcolare con Monte Carlo ( $M=10000$ ):

- (a) probabilità di errore di I tipo;
- (b) probabilità di errore di II tipo;
- (c) potenza.