Inferenza statistica – Scritto 1 – 11 giugno 2024

Cognome, nome e n. di matricola: SOLUZ

- Si corregge solo quanto riportato in questi fogli
- Gli studenti che hanno diritto alla riduzione del compito possono saltare i quesiti: Es. 1 n. 5, Es. 2 n. 1-9-10, Es. 3 n. 2

Problema 1. Sia $X_1, \dots X_n$ un campione casuale in cui si assume per X_i la seguente funzione di densità di probabilità: $f_X(x;\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} I_{[\theta,\infty)}(x), \quad \theta > 0$.

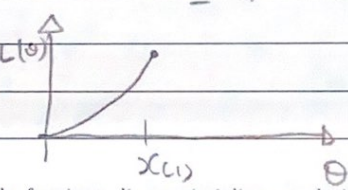
1. Determinare $\mathbb{E}[X]$.

Risp. $\mathbb{E}_\theta[X] = 3\theta^3 \int_\theta^{+\infty} x^{-3}\,dx = 3\theta^3 \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_\theta^{\infty} = \frac{3}{2}\theta$

2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato di dimensione n e la statistica sufficiente $T(\mathbf{x}_n)$, utilizzando il criterio di fattorizzazione.

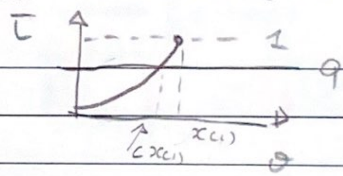
Risp. $L(\theta) = \theta^{3n} I_{[0, x_{(1)}]}(\theta) \Rightarrow T(x_n) = x_{(1)}$

$\bar{L}(\theta) = \left[\frac{\theta}{x_{(1)}}\right]^{3n} I_{[0, x_{(1)}]}(\theta)$



3. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ ($\widehat{\theta}_{mv}$), la funzione di verosimiglianza relativa e disegnarne il grafico.

Risp. $\hat{\theta}_{MV} = x_{(1)}$



$L_q(x_n) = (\theta : \bar{L}(\theta) \geq q) =$

$= \begin{cases} \theta \leq x_{(1)} \\ \left[\frac{\theta}{x_{(1)}}\right]^{3n} \geq q \iff \theta \geq q^{+1/3n} \cdot x_{(1)} = c \end{cases}$

4. Determinare graficamente e analiticamente l'insieme di verosimiglianza di livello q (L_q).

Risp. $L_q(x_n) = [c\,x_{(1)}, x_{(1)}]$ con $c = q^{1/3n}$

5. Supponendo di avere osservato il campione $\mathbf{x}_n = (2, 3, 1, 5, 4)$, determinare i valori osservati di T, $\widehat{\theta}_{mv}$ e L_q ($q = 0.147$).

Risp. $x_{(1)} = 1 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = 1$

$L_q(x_n) = [q^{1/5n}, 1] = [0.88, 1]$

Inferenza statistica – Esonero 2 BIS – 11 giugno 2024

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________

- Si corregge solo quanto riportato in questi fogli
- Gli studenti che hanno diritto alla riduzione del compito possono saltare i quesiti: Es. 2 n. 1-9-10, Es. 3 n. 2

Problema 2. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{\theta^3}{2x^4}\, e^{-\frac{\theta}{x}}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

1. Verificare che il modello per la v.a. X costituisce una famiglia esponenziale.

Risp.

$f_X(x;\theta) = h(x) \exp\{\eta(\theta) T(x) - B(\theta)\}$ con

$T(x) = 1/x \quad \eta(\theta) = -\theta \quad h(x) = 1/2x^4 \quad B(\theta) = -3 \ln\theta$

2. Verificare che la v.a. $Y = \frac{1}{X} \sim \text{Ga}(3, \texttt{rate} = \theta)$.

Risp. $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{y} \quad \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| = \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow$

$f_Y(y;\theta) = \frac{\theta^3}{2} y^4 e^{-\theta y} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{\theta^3}{2} y^2 e^{-\theta y} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}$

con $\alpha = 3 \quad \beta = \theta$

3. Determinare una statistica sufficiente minimale $T(\mathbf{X}_n)$ per il modello e lo stimatore di massima verosimiglianza di θ, indicato con $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$. [**Imp**: ricorda che, in generale, $\sum \frac{1}{x_i} \neq \frac{1}{\sum x_i}$.]

Risp.

Fam espon $\Rightarrow$ $\boxed{T_n(\underline{x}_n) = \sum_i^n \frac{1}{x_i}}$ è S.S.M e compl

$L(\theta) = \theta^{3n} e^{-\theta T}$

$\ell(\theta) = 3n \ln\theta - \theta T \quad \ell'(\theta) = 0 \quad \frac{3n}{\theta} - T = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\hat\theta_{MV} = \frac{3n}{T}}$

4. Determinare $I_n(\theta)$, l'informazione attesa di Fisher, e la distribuzione asintotica di $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$\ell''(\theta) = -\frac{3n}{\theta^2} < 0 \quad \forall\theta \Rightarrow$ OK

$I_n(\theta) = \frac{3n}{\theta^2} \Rightarrow \hat\theta_{MV} \stackrel{\cdot}{\sim} N\left(\theta, \frac{\theta^2}{3n}\right)$ ✩

5. Determinare $\widetilde{C}(\mathbf{X}_n)$, intervallo di confidenza asintotico di livello $1-\alpha$ per θ.

Risp.

Da ✩ $\Rightarrow \frac{\hat\theta_{MV} - \theta}{\sqrt{\hat\theta^2_{MV}/3n}} = \frac{\sqrt{3n}\,(\hat\theta_{MV} - \theta)}{\hat\theta_{MV}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$\Rightarrow$

$\hat\theta_{MV} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat\theta_{MV}}{\sqrt{3n}}$ con $\hat\theta_{MV} = \frac{3n}{T}$

6. Determinare la lunghezza $\mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$ di $\widetilde{C}(\mathbf{X}_n)$ e, utilizzando la distribuzione asintotica di $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$, la sua lunghezza attesa e_n.

Risp.

$\mathcal{L} = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\hat{\theta}_{MV}}{\sqrt{3n}} \Rightarrow e_n = \mathbb{E}_\theta [\mathcal{L}(x_n)] =$

Ricorda $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] \simeq \theta$ $\quad = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\theta}{\sqrt{3n}}$

7. Verificare che il modello ha rapporto delle verosimiglianze monotone in $\widehat{\theta}_{mv}$.

Risp. $\theta_2 > \theta_1$

$\lambda_{21}(x_n) = \left(\dfrac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{3n} \exp\left\{-T\underbrace{(\theta_2-\theta_1)}_{>0}\right\} = \varphi(T)$ con $\varphi(\cdot)\downarrow$

$\hat{\theta}_{MV} = \dfrac{3n}{T}$

$= \left(\dfrac{\theta_2}{\theta_1}\right) \exp\left\{-\dfrac{3n}{\hat{\theta}_{MV}}(\theta_2-\theta_1)\right\} = \xi(\hat{\theta}_{MV})$ $\quad \xi(\cdot)\uparrow$ in $\hat{\theta}_{MV}$

8. Considerare il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, dove θ_0 è un valore fissato e noto per θ. Determinare la generica regione di rifiuto del test UMP, in funzione di $\widehat{\theta}_{mv}$. [Argomentare la risposta].

Risp. RVM $\Rightarrow$ UMP rifiuta $H_0 \Leftrightarrow$

$\hat{\theta}_{MV} > K$

9. Determinare la regione di rifiuto del test UMP di ampiezza α che si trova utilizzando il test di Wald basato sulla statistica test $W_0(\mathbf{X}_n)$.

Risp. $P_{\theta_0}[R] = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}[\hat{\theta}_{MV} > K] =$

$= P_{\theta_0}\left[\dfrac{\hat{\theta}_{MV} - \theta_0}{\theta_0/\sqrt{3n}} > \dfrac{K-\theta_0}{\theta_0/\sqrt{3n}}\right] = \alpha \Leftarrow \quad \dfrac{K-\theta_0}{\theta_0/\sqrt{3n}} = z_{1-\alpha}$

$\rightarrow$ ovvero SC $\tilde{W}_0(x_n) \geq z_{1-\alpha}$

10. Determinare l'espressione della funzione di potenza del test di Wald $W_0(\mathbf{X}_n)$.

$\boxed{K_\alpha = \dfrac{\theta_0}{\sqrt{3n}} z_{1-\alpha} + \theta_0}$

Risp.

$\eta(\theta) = P_\theta\left[\tilde{W}_0(X_n) \geq z_{1-\alpha}\right] = P_\theta\left[\dfrac{\sqrt{3n}}{\theta_0}(\hat{\theta}_{MV} - \theta_0) \geq z_{1-\alpha}\right]$

$= P_\theta\left[\dfrac{\sqrt{3n}}{\theta}(\bar{X}_n - \theta) \geq \dfrac{\sqrt{3n}}{\theta}(\theta_0-\theta) + \dfrac{\theta_0}{\theta} z_{1-\alpha}\right]$

$= 1 - \Phi\left[\dfrac{\sqrt{3n}}{\theta}(\theta_0-\theta) + z_{1-\alpha}\dfrac{\theta_0}{\theta}\right]$

Problema 3: test.

1. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione iid da $N(\theta, \sigma^2)$ (con σ^2 noto e pari a 3.16). Si consideri il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 3$ vs $H_1 : \theta \neq 3$. Scrivere l'espressione della statistica test $W(\mathbf{X}_n)$ per il confronto di tali ipotesi e la regola di rifiuto del test di UMPU di ampiezza α.

Risp. $X_i \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ σ^2 NOTO $\Rightarrow$ TEST su V.A. Norm (N3)

RIF H_0 se $|w^{oss}| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ con

$$w.oss = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}_n - \theta_0)$$

2. Con riferimento al precedente esercizio, si consideri un campione osservato di dimensione $n = 11$ con $\bar{x}_n = 2.18$. Calcolare il valore osservato `w.oss` che si ottiene con i dati a disposizione e stabilire se, con i dati disponibili, l'ipotesi nulla viene accettata o meno in un test di ampiezza $\alpha = 0.1$.

Risp. $\alpha = 0.1 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0.95 = 1.65$

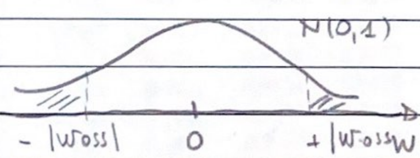
$$w.oss = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3.16}}(2.18 - 3) = -1.53 \Rightarrow |w.oss| = +1.53 < 1.65$$

$\Rightarrow$ ACC H_0

3. Con riferimento ai due quesiti precedenti, determinare il p-value che si ottiene con i dati disponibili. Quali conclusioni si traggono in merito all'accettazione/rifiuto dell'ipotesi nulla in un test di ampiezza $\alpha = 0.1$?

Risp.

$$p\text{-value} = 2\Phi(-|w.oss|) = 2\Phi(-1.53) =$$



$$= 2(1 - \Phi(+1.53)) =$$

$$= 2(1 - 0.9370) = 0.126$$

$> \alpha \Rightarrow$ ACC H_0

4. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione iid da $N(\mu_0, \theta)$ (con μ_0 noto). Considerare ora il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 1.5$ vs $H_1 : \theta < 1.5$. Scrivere l'espressione della statistica test $W(\mathbf{X}_n)$ per il confronto di tali ipotesi e la regola di rifiuto del test UMP di ampiezza α.

Risp. TEST su VARIANZA mod N (N1)

$$W(\underline{X}_n) = \frac{n\, \hat{S}_0^2}{\theta_0}$$

RIF $H_0 \iff W(\underline{X}_n) < \chi^2_{n;\alpha}$

5. Con riferimento al precedente esercizio, si consideri un campione osservato di dimensione $n = 11$ con $S_0^2 = 2.9$. Calcolare il valore osservato `w.oss` che si ottiene con i dati a disposizione e stabilire se l'ipotesi nulla viene accettata o meno in un test di ampiezza $\alpha = 0.1$.

Risp.

$$w.oss = \frac{11 * 2.9}{1.5} = 21.26 \quad \Rightarrow \text{ACC } H_0$$

$$\chi^2_{11;\,0.1} = \left(\chi^2_{11;\,0.9}\right)^* = 5.58$$

6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione iid da $f_X(x;\theta) = (1-\theta)^{x_i}\theta$, $x = 1, 2, \ldots$, $\theta \in (0, 1)$. Determinare una statistica sufficiente per il modello rispetto alla quale il rapporto delle verosimiglianze risulta essere monotono crescente.

Risp. $\theta_2 > \theta_1$ $\quad L(\theta) = (1-\theta)^T \theta^n \quad T = \sum x_i$

$$\lambda_{21}(T) = \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \underbrace{\left(\frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}\right)}_{<1}^{T} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{n}$$

$\Rightarrow \lambda_{21}(T) = $ fne $\downarrow$ di T

$\Rightarrow$ crescente in $\dfrac{1}{\sum x_i}$