

Cognome, nome e n. di matricola:

SOL

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

Problema 1. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione i.i.d. da

$$f_X(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad x \in [0, \theta], \quad \theta > 0.$$

1. Determinare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[X^2]$.

Risp.

$$\mathbb{E}(x) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta x^2 dx = \frac{2}{\theta^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^\theta = \frac{2}{3} \theta$$

$$\mathbb{E}(x^2) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta x^3 dx = \frac{2}{\theta^2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

2. Verificare che $\mathbb{V}[X] = \frac{\theta^2}{18}$.

Risp.

$$\mathbb{V}[X] = \frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{2}{3} \theta\right)^2 = \frac{9-8}{18} \theta^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

lo stimatore dei m di θ è

3. Verificare che la statistica $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n) = \frac{3}{2} \bar{X}_n$ (stimatore dei momenti di θ).

Risp.

$$\mathbb{E}(x) = \bar{X}_n \Leftrightarrow \frac{2}{3} \theta = \bar{X}_n \Rightarrow \hat{\theta}_m = \frac{3}{2} \bar{X}_n$$

4. Stabilire se $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ è non distorto e consistente.

Risp.

$$\mathbb{E}\left[\frac{3}{2} \bar{X}_n\right] = \frac{3}{2} \frac{2}{3} \theta = \theta \quad \forall \theta \Rightarrow \text{ND per } \theta$$

$$\mathbb{V}\left[\frac{3}{2} \bar{X}_n\right] = \frac{9}{4} \frac{\theta^2}{18n} = \frac{\theta^2}{8n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \text{INSE}(\hat{\theta}_m) \rightarrow 0 \quad \forall \theta$$

$\Rightarrow$ è CONSIST

5. Determinare la distribuzione asintotica di $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$$\hat{\theta}_m \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{8n}\right)$$

6. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ e individuare la statistica sufficiente (criterio di fattorizzazione).

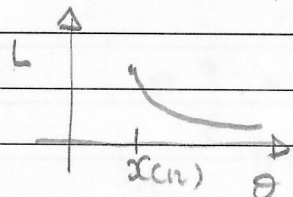
Risp.

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^{2n}} I(\theta) \quad T(x_n) = x_{(n)} \\ [x_{(n)}, +\infty)$$

Disegn grafico di $L(\theta)$

7. Determinare l'espressione di $\hat{\theta}_{mv}(X_n)$, stimatore di massima verosimiglianza di θ .

Risp.

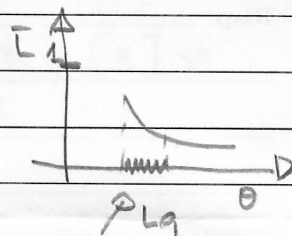


$$\hat{\theta}_{mv} = x_{(n)}$$

8. Determinare l'espressione di $\bar{L}(\theta)$ (f.ne di verosimiglianza relativa) e disegnare il grafico.

Risp.

$$\bar{L}(\theta) = \left[\frac{x_{(n)}}{\theta} \right]^{2n} I(\theta) \\ [x_{(n)}, +\infty)$$



MP non dimenticare
re il
supporto

9. Determinare l'espressione di L_q , insieme di verosimiglianza di livello q . e rappres. grafic.

Risp.

$$\bar{L}(\theta) \geq q \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \geq x_{(n)} \\ \left[\frac{x_{(n)}}{\theta} \right]^{2n} \geq q \Leftrightarrow \frac{x_{(n)}}{\theta} \geq q^{1/2n} \Leftrightarrow \theta \leq x_{(n)} q^{-1/2n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_q = [x_{(n)}, q^{-1/2n} x_{(n)}]$$

10. Supponendo di avere osservato il campione (0.7, 0.8, 1), determinare la stima di massima verosimiglianza di $\mathbb{P}_\theta[X > 1/2]$.

Risp.

$$R_\theta [X > 1/2] = \frac{2}{\theta^2} \int_{1/2}^{\theta} x \, dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^{\theta} = 1 - \frac{1}{4\theta^2}$$

$$\hat{\theta}_{mv} = x_{(n)} = 1 \Rightarrow$$

$$R_\theta [X > 1/2] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Quesiti 1.

1. $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $N(0, \theta)$. Determinare $\mathbb{E}[aS_0^2 + b]$ e $\mathbb{V}[aS_0^2 + b]$.

Risp.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_0^2] &= \theta \Rightarrow \mathbb{E}[aS_0^2 + b] = a\theta + b = b \\ \mathbb{V}[S_0^2] &= \frac{2\theta^2}{n} \Rightarrow \mathbb{V}[aS_0^2 + b] = a^2 \mathbb{V}[S_0^2] = 2a^2 \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

2. $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. da $f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in [0, 1]$, $\theta > 0$. Determinare $I_n(\theta)$.

Risp.

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \theta^n \prod_{i=1}^n x_i \Rightarrow \ell(\theta) = n \ln \theta + \theta \ln T \\ \ell'(\theta) &= \frac{n}{\theta} + \ln T \quad \ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} \\ \Rightarrow I_n(\theta) &= n/\theta^2 \end{aligned}$$

3. Se uno stimatore è consistente, è anche necessariamente non distorto? (Spiegare la risposta).

Risp.

$$\begin{aligned} \text{CONSIST} \Leftrightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] &\xrightarrow{n} \theta \quad \forall \theta \\ \mathbb{V}[\hat{\theta}_n] &\xrightarrow{n} 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \text{non deve essere} \\ &\quad \text{NECESS ND} \\ &\quad \text{(SOLO ASINTOT)} \end{aligned}$$

4. Verificare che $f(x) = 2(1-x)$, $x \in [0, 1]$ è una funzione di densità.

Risp.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &\geq 0 \quad \forall x \\ \text{(b)} \quad \int_0^1 2(1-x) dx &= 2 - \int_0^1 2x dx = 2 - x^2 \Big|_0^1 = 2 - 1 = 1 \\ &\Rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

5. Determinare il modello con parametro di scala σ a partire dalla funzione di densità del precedente esercizio.

Risp.

$$\begin{aligned} f_5(x; \sigma) &= \frac{2}{\sigma} \left(1 - \frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{I}_{\left[\frac{x}{\sigma}\right]} \left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ &= \frac{2}{\sigma} \left(1 - \frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{I}_{[0, \sigma]}(x) \end{aligned}$$

NB
SI MODIFICA
IL SUPPORTO

3

Cognome, nome e n. di matricola: Sol

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

Problema 2. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

1. Individuare il modello a cui appartiene $f_X(x; \theta)$ e verificare che θ è un parametro di scala.

Risp.

MODELLO

$$X \sim \text{Ga}^s(3, \theta) \Rightarrow E(X) = 3\theta \quad V(X) = 3\theta^2$$

VERIFICA

poni prima $\theta = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x/1} \quad x \geq 0 \quad \theta > 0$
 poi $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} \quad x \geq 0 \quad \theta > 0 \Rightarrow OK$

2. Determinare: (a) $L(\theta; \mathbf{x}_n)$, funzione di verosimiglianza di θ ; (b) $T(\mathbf{x}_n)$, statistica sufficiente del modello (criterio di fattorizzazione); (c) $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza di θ [senza controllo della derivata seconda].

Risp. (a) $L(\theta) = c \cdot \theta^{-3n} \theta^{-\sum x_i/\theta}, \quad \theta > 0$

Risp. (b) $T(\mathbf{x}_n) = \sum x_i$

Risp. (c) $\ell(\theta) = -3n \ln \theta - \frac{\sum x_i}{\theta} \quad \ell'(\theta) = -\frac{3n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2}$

$$\ell'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{3n} \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{\bar{x}_n}{3}$$

3. Determinare $E[X]$ e verificare che lo stimatore dei momenti $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ coincide con lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$$E[X] = 3\theta \Rightarrow E(X) = \bar{x}_n \Leftrightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\bar{x}_n}{3}$$

4. Considerare $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_0 > \theta_1$). Utilizzando il rapporto delle verosimiglianze, determinare la generica regione di rifiuto di H_0 in funzione della statistica sufficiente $T(\mathbf{x}_n)$ del modello ottenuta con il criterio di fattorizzazione.

Risp. Rifi H_0 se $\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) \leq k$

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) \leq k \Leftrightarrow \left[\frac{\theta_1}{\theta_0} \right]^{-3n} \exp \left\{ -\sum x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right\} \leq k$$

fun CRESC di $\sum x_i \Rightarrow \text{Rifi } H_0 \text{ se } \sum x_i \leq k$

5. Determinare la distribuzione campionaria di $T(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0 .

Risp.

$$\sum x_i | \theta_0 \sim \text{Ga}^s(3n, \theta_0) \quad \text{NB: } \theta_0 !!$$

6. Determinare l'espressione di $k_\alpha(\theta_0)$ per il test ottimo di ampiezza α (utilizzare la distribuzione di $T(\mathbf{X}_n)$ sotto ipotesi nulla).

Risp. $R = \{x_n : \sum x_i \leq k\}$

Determino k_α : $P_{\theta_0}[R] = \alpha \Leftrightarrow$

$$P_{\theta_0}[\sum x_i \leq k] = \alpha \Rightarrow \boxed{k_\alpha = q_{\frac{\alpha}{n}}(\theta_0)} \text{ di } G_9(3n, \theta_0)$$

7. (a) Calcolare $V(\hat{\theta}_{mv}) = I_n^{-1}(\theta)$; (b) verificare che $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{3n})$.

Risp. (a)

$$V[\hat{\theta}_{mv}] = V\left[\frac{\bar{X}_n}{3}\right] = \frac{1}{9} \frac{V(X)}{n} = \frac{3\theta^2}{9n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Risp. (b) $\hat{\theta}_{mv} \sim N(0, \theta^2/3n)$

8. Determinare: (a) quantità pivotale asintotica $\tilde{Q}(\mathbf{X}_n, \theta)$; (b) intervallo di confidenza asintotico $\tilde{C}$ per θ di livello $1 - \alpha$.

Risp. (a) $\tilde{Q} = \frac{\bar{X}_n/3 - \theta}{\theta/\sqrt{3n}} = \frac{\sqrt{3n}(\bar{X}_n - \theta)}{\theta}$

Risp. (b)

$$\tilde{C} = \frac{\bar{X}_n}{3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{X}_n/3}{\sqrt{3n}}$$

9. Con riferimento all'intervallo $\tilde{C}$ (domanda precedente), determinare: (a) $\mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$ (lunghezza); $e_n = E[\mathcal{L}(\mathbf{X}_n)]$ (lunghezza attesa).

Risp. (a)

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}_n) = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{(\bar{X}_n/3)}{\sqrt{3n}}$$

Risp. (b) $e_n = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{3n}}$

10. Con riferimento all'intervallo $\tilde{C}$ (domande precedenti), determinare l'espressione di $n^* = \min\{n \in \mathbb{N} : e_n \leq \ell_0\}$ in funzione di θ .

Risp.

$$e_n \leq \ell_0 \Leftrightarrow 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{3n}} \leq \ell_0 \Leftrightarrow 3 \geq 4 z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\theta^2}{3\ell_0^2}$$

$$\Rightarrow n^* = \left\lceil \frac{4}{3} z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\theta^2}{\ell_0^2} \right\rceil$$

Quesiti 2.

1. $X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Ber}(\theta)$ iid. Scrivere l'espressione dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha$ per $g(\theta) = \theta^2$.

Risp.

$$g(\hat{\theta}_{nv}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} |g'(\hat{\theta}_{nv})| \sqrt{I_n^{-1}(\theta)} \quad \text{con}$$

- $g'(\theta) = 2\theta$
- $I_n^{-1}(\theta) = \theta(1-\theta)/n \quad \text{per } \hat{\theta} = \bar{X}_n \quad \Rightarrow \quad C = \bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} 2\bar{X}_n \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}$
- $\hat{\theta}_{nv} = \bar{X}_n$

2. $X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Pois}(\theta)$ iid. Verificare che il modello ha rapporto delle verosimiglianze monotono in $\bar{x}_n$.

Risp.

$$L(\theta) = e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i} \quad \theta_2 > \theta_1$$

$$\lambda_{21}(\underline{x}_n) = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{\sum x_i} e^{-n(\theta_2 - \theta_1)} = \text{cost} \times \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{n\bar{x}_n}$$

$\Rightarrow$ funzione $\uparrow$ di $\bar{x}_n$

3. $X_1, \dots, X_n | \theta \sim N(\mu_0, \theta)$ iid. Scrivere la regione di rifiuto del test UMP di ampiezza α per le ipotesi $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1: \theta > \theta_0$.

Risp.

Per le te di KARLIN-RUBIN (quando il modello RVD in $T = S_0^2$) si ha $R = \{ \underline{x}_n : S_0^2 > K \}$

$$S_0^2 | \theta_0 \sim \chi^2\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2\theta_0}\right) \Rightarrow P_{\theta_0}[R] = \alpha \Leftrightarrow K_\alpha = q_{1-\alpha}(\theta)$$

quantile di $\chi^2\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2\theta_0}\right)$

4. $X_1, \dots, X_n | \theta \sim N(\theta, 4)$ iid ($n = 9$). $H_0: \theta \geq 3$ vs. $H_1: \theta < 3$. Scrivere l'espressione del p-value in funzione di un generico valore di $\bar{x}_n$.

Risp.

TEST di TIPO (B) $\Rightarrow$ p-value = $\Phi(W_{\text{oss}})$

con

$$W_{\text{oss}} = \sqrt{n}(\bar{x}_n - \theta_0)/\sigma = 3(\bar{x}_n - 3)/2$$

5. Con riferimento al Punto precedente 4, determinare il valore di $\bar{x}_n$ tale che il p-value risulti uguale a 0.05. [Ricorda: $z_{0.05} = -1.65$.]

Risp.

$$\bar{x}_n : \Phi\left[\frac{3}{2}(\bar{x}_n - 3)\right] = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(\bar{x}_n - 3) = -1.645$$

$$\bar{x}_n = \frac{2}{3}(-1.645) + 3 = 1.9$$