Inferenza statistica – Scritto 2, Parte A
1 luglio 2021

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________________

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione causale da una popolazione $X \sim \text{Esp}(\theta)$ Per un campione di dimensione $n = 30$ si ha che $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$. Calcolare l'intervallo di confidenza **asintotico** per θ di livello 0.85.

   Risp. ______________________________

2. Sia $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d.. **(a)** Calcolare l'intervallo di confidenza di livello $1-\alpha = 0.90$ per $g(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$ sapendo che $\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$, $n = 30$. **(b)** Stabilire se, sulla base di questo intervallo, è plausibile supporre che il vero valore di $g(\theta)$ sia pari a 0.5 (rispondere e motivare).

   Risp. (a)

   Risp. (b)

3. Sia $X_1, \ldots, X_n \sim \text{N}(\theta_1, \theta_2)$ i.i.d.. Scrivere l'espressione generica della statistica test di Karlin-Rubin (UMP) per il confronto delle ipotesi $H_0 : \theta_1 = 0.6$ vs. $H_1 : \theta_1 < 0.6$. Sapendo che $\sum_{i=1}^{n} x_i = 12$, $n = 30$, $S_n^2 = 0.9$ determinare il valore numerico della statistica test, scrivere la regola di rifiuto del test di ampiezza $\alpha = 0.05$ (in funzione dell'opportuno percentile) e stabilire se si accetta o rifiuta H_0.

   Risp. ______________________________

   W= ______________________________

   valore numerico W= ______________________________

   Regola generale per questo test: ______________________________

   In questo caso specifico: ______________________________

4. Sia $X_1, \ldots, X_n \sim \text{N}(\theta_1, \theta_2)$. Si consideri il campione osservato con: $\overline{x}_n = 4$, $\sum(x_i - \overline{x})^2 = 64$, $n = 25$. Scrivere in funzione dell'opportuna funzione di ripartizione l'espressione del p-value per la verifica delle ipotesi $H_0 : \theta_2 = 2$ vs. $H_1 : \theta_2 > 2$. Calcolare il p-value e stabilire se si accetta o rifiuta H_0 in un test di ampiezza $\alpha = 0.1$.

   Risp. ______________________________

   espressione w.oss: ______________________________

   valore di w.oss: ______________________________

   espressione generica p-value: ______________________________

   valore p-value: ______________________________

   decisione: ______________________________

5. Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione causale di dimensione $n = 4$ da una popolazione $\mathrm{N}(\theta, 1)$. Considerare il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ vs. $H_1 : \theta = 1$. Si consideri la regione di rifiuto dell'ipotesi nulla del test definita da $\mathrm{R} = \{\mathbf{x}_n : \sum_1^n x_i > 5\}$. Calcolare la potenza del test associata alla regione R.

   Risp. ____

6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione causale da una popolazione Poisson di parametro θ. Sia ℓ la lunghezza dell'intervallo di confidenza asintotico per θ. Determinare l'espressione $\mathbb{P}[\ell^2 > c]$ (utilizzando l'opportuna approssimazione asintotica per la distribuzione della v.a. coinvolta).

   Risp. ____

7. Si consideri il modello $\mathrm{EN}(\theta)$ e il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ vs. $H_1 : \theta \geq 2$. Si consideri un campione di dimensione $n = 1$. Determinare l'espressione della regione di rifiuto di H_0 del test di Karlin-Rubin e il valore dell'ampiezza α che si trova supponendo che la soglia critica sia $k = 1/2$.

   Risp. ____

8. Modello normale $N(\mu_0, \sigma^2)$ (μ_0 nota). La statistica test per verifica di ipotesi nulla puntuale contro alternativa bilaterale su σ^2 ha, sotto ipotesi nulla, distribuzione:

   ☐ χ^2_n ☐ χ^2_{n-1} ☐ t_n ☐ t_{n-1} ☐ $N(0,1)$

9. Siano $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. i.i.d. $\mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ ($\beta =$ `rate`). Come si distribuisce $2\overline{X}_n$?

10. Sia X una v.a. assolutamente continua con densità $f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1}$, $x \in [0, 1]$, $\theta > 0$. Si consideri il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 1$ vs. $H_1 : \theta > 1$. Determinare la funzione di potenza del test basato su una sola osservazione e sulla regione di rifiuto $\mathrm{R} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$ e il suo valore in $\overline{\theta} = 2$.

    $\eta(\theta) =$ ____

    $\eta(2) =$ ____

Inferenza statistica – Scritto 1, Parte B
1 luglio 2021

Cognome, nome e n. di matricola: ____________________

B – Problema.

Sia $X_1, \dots X_n$ un campione casuale in cui si assume per X_i la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \qquad x \in [0, \theta], \quad \theta > 0.$$

1. Verificare che $f_X(x;\theta)$ è una funzione di densità di probabilità per X.

   Risp.

2. Determinare $\mathbb{E}[X]$ e verificare che $\mathbb{V}[X] = \theta^2/18$.

   Risp.

3. Determinare $\widehat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$, stimatore dei momenti di θ, e la sua distribuzione asintotica.

   Risp.

4. Fornire l'espressione di uno stimatore della varianza asintotica di $\widehat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ e l' espressione dell'intervallo di confidenza asintotico $\tilde{C}$ di livello $1-\alpha$ per θ basato su $\widehat{\theta}_M$.

   Risp.

5. Determinare una statistica sufficiente per il modello, la stima di massima verosimiglianza $\widehat{\theta}_{mv}$ del parametro θ e la funzione di verosimiglianza relativa.

   Risp.

6. Determinare l'espressione dell'insieme di verosimiglianza di livello $q \in (0,1)$.

   Risp. ____

7. Supporre di avere osservato il campione $\mathbf{x}_n = (1,4,2,3,5,6,2,5,7,8)$ Calcolare il valore osservato di $\widehat{\theta}_M$ e $\tilde{C}$, assumendo $\alpha = 0.05$.

   Risp. ____

   Valore di $\widehat{\theta}_m$ ____________________________________

   Estremi (numerici) di $\tilde{C}$ ________________________________

8. Per lo stesso campione, calcolare il valore osservato di $\widehat{\theta}_{mv}$ e L_q, assumendo e $q = 0.147$.

   Risp. ____

   Valore di $\widehat{\theta}_{mv}$ ___________________________________

   Estremi (numerici) di L_q ________________________________

9. Si consideri il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$. Utilizzando lo stimatore dei momenti come statistica test, determinare la regola di rifiuto di H_0 del test asintotico di ampiezza α [ovvero: specificare la generica regione di rifiuto R basata su $\widehat{\theta}_M$ e poi l'espressione di k_α].

   Risp. ____

10. Per il suddetto test, scrivere l'espressione della funzione di potenza del test di ampiezza α.

    Risp. ____