Inferenza statistica – Esonero 2 – 03 giugno 2024

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________

- Si corregge solo quanto riportato in questi fogli
- Gli studenti che hanno diritto alla riduzione del compito possono saltare i quesiti *

Problema 1. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione $X \sim \text{Ga}(3, \texttt{scale} = \theta)$, con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta^3}\, x^2\, e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

1. Determinare: $\mathbb{E}_\theta(X)$, $\mathbb{V}_\theta(X)$, $\mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n)$ e $\mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n)$.

   Risp.

   $\mathbb{E}_\theta(X) = 3\theta \qquad \mathbb{V}_\theta(X) = 3\theta^2$

   $\mathbb{E}_\theta(\bar{X}_n) = 3\theta \qquad \mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{3\theta^2}{n}$

2. Determinare l'espressione di $\widehat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$, stimatore dei momenti di θ, e il suo valore atteso.

   Risp.

   $\mathbb{E}_\theta(X) = 3\theta = \bar{X}_n \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_M = \frac{\bar{X}_n}{3}}$

   $\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\bar{X}_n}{3}\right) = \theta \quad \forall\theta \Rightarrow$ ND

3. Determinare varianza e distribuzione asintotica di $\widehat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$.

   Risp.

   $\mathbb{V}\left[\frac{\bar{X}_n}{3}\right] = \frac{1}{9n}\mathbb{V}_\theta(X) = \frac{3\theta^2}{9n} = \frac{\theta^2}{3n}$

   $\hat{\theta}_M \,\dot{\sim}\, N\left(\theta, \frac{\theta^2}{3n}\right)$

4. Verificare che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ coincide con $\widehat{\theta}_m$.

   NB $T = \Sigma x_i$ è SSC

   Risp.

   $L(\theta) = \theta^{-3n}\, e^{-T/\theta} \qquad \theta > 0 \qquad T = \Sigma x_i$

   $\ell(\theta) = -3n \ln\theta - T/\theta$

   $\ell'(\theta) = -\frac{3n}{\theta} + \frac{T}{\theta^2} = 0 \iff \hat{\theta} = \frac{T}{3n} = \hat{\theta}_m$

5. Determinare l'espressione di $I_n(\theta)$ (usando la definizione di informazione attesa di Fisher).

   Risp.

   $\ell''(\theta) = +\frac{3n}{\theta^2} - \frac{2T}{\theta^3} \qquad \mathbb{E}_\theta[\ell''] = \frac{3n}{\theta^2} - \frac{2n(3n\theta)}{\theta^3}$

   $= \frac{n}{\theta^2}\left[3 - 6\right] = -\frac{3n}{\theta^2}$

   $\Rightarrow \boxed{I_n(\theta) = +\frac{3n}{\theta^2}}$

6. Verificare che $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ è lo stimatore UMVUE di θ (motivare la risposta).

Risp.

$T = \sum X_i$ è STAT SUFF MINIM (CALC FATTI) (vedi 3)

e $\hat{\theta}_{MV} = \frac{\bar{X}_n}{2}$ è NON DISTORTO (vedi 2)

$\Rightarrow$ Teo RB $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MV}$ è UMVUE di θ

7. Determinare l'espressione di $\widehat{\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_m)}$, stimatore della varianza asintotica di $\hat{\theta}_m$.

Risp. $\tilde{\mathbb{V}}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{\theta^2}{3n} \Rightarrow \widehat{\mathbb{V}(\hat{\theta}_{MV})} = \frac{[\bar{X}_n/3]^2}{3n}$

$= \bar{X}_n^2 / 27n$

8. Determinare $\widetilde{C}(\mathbf{X}_n)$, intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per θ utilizzando l'approssimazione normale della distribuzione campionaria dello stimatore $\hat{\theta}_m$.

$\boxed{\hat{\theta}_{MV} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_M}{\sqrt{3n}}}$

Risp.

$\frac{\bar{X}_n}{3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{X}_n}{3\sqrt{3n}}$

9. Determinare $\mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$, lunghezza dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1-\alpha$ per θ e il suo valore atteso.

Risp.

$\mathcal{L} = \frac{2}{3\sqrt{3n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \bar{X}_n$

$\mathbb{E}_\theta[\mathcal{L}] = \frac{2}{3\sqrt{3n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cancel{3\theta} = 2\theta\, z_{1-\alpha/2} / \sqrt{3n}$

10. Sulla base dei risultati dei punti precedenti, determinare il valore della stima puntuale e l'intervallo di confidenza $\widetilde{C}$ di livello 0.95 per il parametro θ in corrispondenza del campione osservato $\mathbf{x}_n = (8, 7, 6, 2, 5, 10, 5, 9, 5, 3)$.

Risp. $\bar{x}_n = 6 \quad n = 10 \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}_n = \frac{6}{3} = 2$

$C = 2 \pm (1.96) \frac{2}{\sqrt{30}} =$

$= [1.28, 2.72]$

Esercizi sui test.

1. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione iid da $N(\theta, \sigma^2)$ (con σ^2 noto e pari a 3.16). Si consideri un campione osservato di dimensione $n = 11$ con $\bar{x}_n = 2.18$. Si consideri il sistema di ipotesi semplici $H_0 : \theta = \theta_0 = 3$ vs $H_1 : \theta = \theta_1 = 2$. Scrivere l'espressione della statistica test $W(\mathbf{X}_n)$ per il confronto di tali ipotesi e la regola di rifiuto del test di Neyman-Perason di ampiezza α.

   Risp. $W = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$; $\theta_0 > \theta_1 \Rightarrow$ RIF $H_0 \Leftrightarrow$ $w.oss \leq z_\alpha$

2. Con riferimento al precedente esercizio, calcolare il valore osservato `w.oss` che si ottiene con i dati a disposizione. e stabilire se, con i dati disponibili, l'ipotesi nulla viene accettata o meno, se si assume $\alpha = 0.05$.

   Risp. $w.oss = \sqrt{\frac{11}{3.16}}\,(2.18 - 3) = -1.53$

   $z_{0.05} = -1.645$ $\Rightarrow$ $w.oss > z_\alpha$ $\Rightarrow$ ACC H_0

3. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione iid da $N(\mu_0, \theta)$ (con μ_0 noto e pari a 2.18). Si consideri un campione osservato di dimensione $n = 11$ con $S_0^2 = 2.9$. Considerare ora il sistema di ipotesi semplici $H_0 : \theta = 1.5$ vs $H_1 : \theta = 3$. Scrivere l'espressione della statistica test $W(\mathbf{X}_n)$ per il confronto di tali ipotesi e la regola di rifiuto del test di Neyman-Perason di ampiezza α.

   Risp. $W(X_n) = \frac{n S_0^2}{\theta_0}$; $\theta_0 < \theta_1 \Rightarrow$ RIF $H_0 \Leftrightarrow$

   $w.oss \geq \chi^2_{n;1-\alpha}$

4. Con riferimento al precedente esercizio, calcolare il valore osservato `w.oss` che si ottiene con i dati a disposizione. e stabilire se, con i dati disponibili, l'ipotesi nulla viene accettata o meno, se si assume $\alpha = 0.05$.

   Risp. $w.oss = \frac{11 * (2.9)}{1.5} = 21.27$

   $\Rightarrow$ $w.oss > \chi^2_{n;1-\alpha}$

   $\chi^2_{n;0.95} = 19.67$ $\Rightarrow$ RIF H_0

5. Con riferimento ai precedenti due quesiti, verificare analiticamente che, per le ipotesi considerate, $\lambda_{10}(\mathbf{x}_n) > k \iff S_0^2 > k'$.

   Risp. $L(\theta) = \theta^{-n/2} \exp\left\{-\frac{n S_0^2}{\theta}\right\}$

   $\Rightarrow$

   $\lambda_{10}(x_n) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{+\frac{n}{2}} \exp\left\{-n S_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}_{<0}\right\}$

   $\Rightarrow$

   f.ne cresc di S_0^2 $\Rightarrow$

   $\lambda_{10}(x_n) \geq k \Leftrightarrow S_0^2 \geq k'$ $\Rightarrow$ OK

6. Con riferimento ai quesiti 3-4-5, determinare l'espressione della potenza $1 - \beta$ del test che ha probabilità di errore di I specia pari ad α.

$$1-\beta = P_{\theta_1}[R] = P_{\theta_1}\left[\frac{n S_0'^2}{\theta_0} \geq \chi^2_{n;1-\alpha}\right]$$

$$= P_{\theta_1}\left[S_0^2 \geq \frac{\theta_0}{n}\chi^2_{n;1-\alpha}\right]$$

$$= P_{\theta_1}\left[\frac{n S_0^2}{\theta_1} \geq \frac{\theta_0}{\theta_1}\chi^2_{n;1-\alpha}\right]$$

$$= 1 - \underbrace{F}_{\text{cdf di } \chi^2_n}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\chi^2_{n;1-\alpha}\right)$$