

(A)

Cognome, nome e n. di matricola:

SOLUZIONI

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione causale da una popolazione $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$, con entrambi i parametri incogniti. Per un campione di dimensione $n = 10$ si ha che $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = 30$. Calcolare l'intervallo di confidenza per θ_2 di livello 0.95 sapendo che $\chi_{n-1;0.025}^2 = 2.7$, $\chi_{n;0.025}^2 = 3.2$, $\chi_{n-1;0.975}^2 = 19$, $\chi_{n;0.975}^2 = 20$.

Risp.

$$d = \left[\frac{(n-1) s_n^2}{q_2}, \frac{(n-1) s_n^2}{q_1} \right] = \left[\frac{30}{19}, \frac{30}{2.7} \right] = [1.5, 11.1]$$

2. Sia $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$ i.i.d..

- (a) Calcolare l'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per θ sapendo che $\sum_{i=1}^n x_i = 36$, $n = 18$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$.
(b) Stabilire se, sulla base di questo intervallo, è plausibile supporre che il vero valore di θ sia pari a 2 (rispondere e motivare).

Risp. (a)

$$d = \bar{x}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} = \bar{x}_n \pm 1 / \sqrt{n}$$

$$= \frac{36}{18} \pm \frac{1}{\sqrt{18}} = [1.8, 2.2]$$

Risp. (b)

$$2 \in [1.8, 2.2] \Rightarrow \text{ACCETTO } H_0$$

(livello $\alpha = 0.05$)

3. Sia $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$ i.i.d.. Scrivere l'espressione generica della statistica test di Karlin-Rubin (UMP) per il confronto delle ipotesi $H_0 : \theta = 0.2$ vs. $H_1 : \theta > 0.2$. Sapendo che $\bar{x} = 0.7$, $n = 16$, $z_\alpha = -1.6$, $z_{1-\alpha} = 1.6$, $z_{\alpha/2} = -1.9$, $z_{1-\alpha/2} = 1.9$, determinare il valore numerico della statistica test, scrivere la regola di rifiuto del test di ampiezza α (in funzione dell'opportuno percentile) e stabilire se si accetta o rifiuta H_0 .

Risp.

$$W = \frac{\sqrt{n} (\bar{x}_n - \theta_0)}{\sigma} = \sqrt{n} (\bar{x}_n - \theta_0)$$

$$\text{valore numerico } W = \sqrt{16} (0.7 - 0.2) = 2$$

Regola generale per questo test:

$$\text{Rif } H_0 \text{ se } W > z_{1-\alpha}$$

In questo caso specifico:

$$2 > 1.6 \Rightarrow \text{RIF } H_0$$

4. Sia $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$. Si consideri il campione osservato con: $\bar{x} = 4$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 64$, $n = 25$, $\theta_0 = 4$. Scrivere in funzione di $\Phi(\cdot)$ o di $\text{pnorm}(\cdot)$ l'espressione del p-value per la verifica delle ipotesi $H_0 : \theta = 4$ vs. $H_1 : \theta < 4$. Calcolare il p-value e stabilire se si accetta o rifiuta H_0 in un test di ampiezza $\alpha = 0.05$.

Risp.

$$\text{espressione w.oss: } W_{\text{oss}} = \frac{\sqrt{n} (\bar{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$$

$$\text{valore di w.oss: } W_{\text{oss}} = \frac{\sqrt{25} (4 - 4)}{1} = 0$$

$$\text{espressione generica p-value: } \Phi(W_{\text{oss}})$$

$$\text{valore p-value: } \Phi(0) = 1/2$$

$$\text{decisione: } \text{p-value} > \alpha \Rightarrow \text{ACC } H_0$$

5. Sia X_1, X_2, X_3 un campione casuale di dimensione $n = 3$ da una popolazione di Poisson di parametro θ . Considerare il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ vs. $\theta = 1$. Si consideri la regione di rifiuto dell'ipotesi nulla del test definita da $R = \{x_n : \sum_i x_i < 2\}$. Calcolare la probabilità di errore di I specie associata alla regione R .

Risp.

$$\alpha = P(R | H_0) = P\left(\sum_{i=1}^3 X_i < 2 \mid \theta = 2\right) =$$

$$= P\left(\sum X_i = 0 \mid \theta = 2\right) + P\left(\sum X_i = 1 \mid \theta = 2\right)$$

$$Z X_i \mid \theta \sim \text{Pois}(n\theta) \Rightarrow \text{qui Poisson}(6)$$

$$e^{-n\theta} + (n\theta) e^{-n\theta} = e^{-n\theta} (1 + n\theta) = e^{-6} (1 + 6)$$

$$= 0.017$$

6. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale da una popolazione con funzione di densità $f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. Determinare l'espressione dell'intervallo di confidenza esatto di livello $1 - \alpha$.

Risp.

$$X_i \mid \theta \sim \text{Ga}(1, \text{scale} = \theta) \quad \text{i.i.d.}$$

$$\Rightarrow \sum X_i \mid \theta \sim \text{Ga}(n, \text{scale} = \theta) \Rightarrow \frac{\sum X_i}{\theta} \sim \text{Ga}(n, 1)$$

$$\Rightarrow \forall \theta$$

$$1 - \alpha = P\left[q_1 \leq \frac{\sum X_i}{\theta} \leq q_2\right] \Rightarrow$$

$$C = \left[\frac{\sum X_i}{q_2}, \frac{\sum X_i}{q_1} \right] \text{ con } q_2 = q_{1-\alpha/2} \text{ di Ga}(n, 1)$$

$$q_1 = q_{\alpha/2}$$

7. Con riferimento al precedente esercizio, determinare l'espressione dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha$.

Risp.

$$\hat{\theta}_{MV} = \bar{X}_n \quad \bar{X}_n \mid \theta \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right) \quad I_n^{-1}(\theta) = \frac{\bar{X}_n^2}{n}$$

$$\Rightarrow$$

$$C = \bar{X}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\bar{X}_n}{\sqrt{n}}$$

8. Modello normale $N(\mu, \sigma^2)$. La statistica test per verifica di ipotesi su σ^2 (valore atteso noto) ha, sotto ipotesi nulla ($\mu = \mu_0$) distribuzione:

☒ χ_n^2 ☐ χ_{n-1}^2 ☐ t_n ☐ t_{n-1} ☐ $N(0, 1)$

9. Date due v.a. $U \sim N(0, 1)$ e $V = \chi_q^2$ indipendenti, quale tra le seguenti è una v.a. $F_{1,q}$?

☐ $\frac{U^2}{V^2/\sqrt{q}}$ ☒ $\frac{qU^2}{V^2}$ ☐ $\frac{qV}{U}$ ☐ $\frac{U^2}{qV}$ ☐ $q \frac{U}{\sqrt{V^2}}$

$$\frac{U^2/1}{V^2/q} = q \frac{U^2}{V^2}$$

10. Nel caso di un modello EN(θ) (esponenziale negativo di parametro θ), il limite inferiore di Cramer-Rao è:

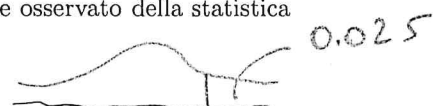
☒ $\frac{\theta^2}{n}$ ☐ $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ ☐ $\frac{\theta}{n}$ ☐ $\frac{1}{n\theta^2}$ ☐ $\frac{n}{\theta^2}$

11. Ciascuno dei seguenti numeri indicano il p-value associato a un campione osservato (5 diversi campioni). Quali tra questi fornisce l'evidenza più forte contro l'ipotesi nulla?

☒ $p = 0.001$; ☐ $p = 0.050$; ☐ $p = 0.010$; ☐ $p = 0.100$; ☐ $p = 0.150$.

12. Se per il test $H_0 : \mu = 0$ vs. $\mu \geq \mu_0$ (modello normale, varianza nota) il valore osservato della statistica test è $w_{oss} = z_{0.975}$, il corrispondente p-value risulta pari a

☐ 0.975 ☒ 0.025 ☐ 0.050 ☐ 0.950 ☐ 0.010



B – Problema. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale in cui si assume per X_i la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x; \theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

1. Determinare l'espressione della funzione di verosimiglianza di θ e quella di $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$, stimatore di massima verosimiglianza del parametro.

Risp.

$$L(\theta) = c \cdot \theta^n e^{-\theta T} \quad T = \sum x_i^2$$

$$\ell(\theta) = n \ln \theta - \theta T$$

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - T = 0$$

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{mv} = \frac{n}{T}}$$

2. Determinare l'informazione attesa e l'approssimazione normale della distribuzione campionaria di $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\hat{\theta}_{mv} \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

3. Fornire l'espressione di uno stimatore della varianza asintotica di $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$$\hat{V}_\theta[\hat{\theta}_{mv}] = \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \hat{V}_\theta[\hat{\theta}_{mv}] = \frac{\theta_{mv}^2}{n} = \frac{n^2/T^2}{n} = \boxed{n/T^2}$$

4. Determinare l'espressione dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha$ per θ .

Risp.

$$\hat{G} = \hat{\theta}_{mv} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_{mv}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{T} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{n/T}{\sqrt{n}} = \frac{n}{T} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{T\sqrt{n}}$$

5. Supponendo di avere osservato un campione di dimensione $n = 20$ in cui $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 80$, determinare i valori numerici di $\hat{\theta}_{mv}$ e della stima della sua varianza asintotica.

Risp.

$$\hat{\theta}_{mv} = n/T = 20/80 = 1/4 = 0.25$$

$$\hat{V}_\theta[\hat{\theta}_{mv}] = n/T^2 = 20/80^2 = 0.003$$

6. Supponendo di avere osservato un campione di dimensione $n = 20$ in cui $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 80$, determinare i valori numerici degli estremi dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha = 0.95$ per θ , sapendo che $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ e $z_{1-\alpha} = 1.645$.

Risp.

$$C = 0.25 \pm 1.96 \frac{0.25}{\sqrt{20}} = [0.14, 0.36]$$

7. Determinare una statistica sufficiente rispetto alla quale il modello ha rapporto delle verosimiglianze monotono (non decrescente).

Risp.

$$\theta_2 > \theta_1 \quad \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \lambda_{21}$$

$$\lambda_{21} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \times \exp \left\{ - \underbrace{(\theta_2 - \theta_1) T}_{> 0} \right\} = \uparrow \text{ di } -T \text{ o di } 1/T$$

8. Si consideri il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$. Scrivere la regione di rifiuto (generica) del test UMP (di Karlin-Rubin) in funzione della statistica sufficiente e dello stimatore di massima verosimiglianza di θ .

Risp.

$$R = \{ \underline{x}_n : \frac{1}{T} < K \} = \{ x_n : T > K \}$$

$$= \{ x_n : \frac{n}{T} = \hat{\theta}_{MV} < K \}$$

9. Si consideri il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$, con $\theta_0 = 9/5$. Supporre di avere osservato un campione di dimensione $n = 20$ in cui $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i = 80$. Calcolare il valore osservato $\tilde{w}_0$ della statistica test $\tilde{W}_0$ (test di Wald).

Risp.

$$\tilde{W}_0 = \frac{(\hat{\theta}_{MV} - \theta_0)}{I_n^{-1/2}(\theta_0)}$$

$$= \sqrt{n} (\bar{x} - \theta_0) / \theta_0$$

$$\text{Valore numerico di } \tilde{w}_0 = \sqrt{20} (20/80 - 9/5) / 9/5 = -1.67$$

10. Stabilire se si accetta o meno l'ipotesi nulla del test di ampiezza $\alpha = 0.95$ per θ , sapendo che $z_\alpha = -1.645$ e che $z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96$.

Risp.

$$\text{Rif } H_0 \text{ se } \tilde{w}_{oss} < z_\alpha = -1.645$$

$$\hookrightarrow -1.67 < -1.645$$

$$= \Rightarrow$$

$$\text{Rif } H_0$$

3 GIUGNO 2021 IS - esonero 2

PARTE A

ES. 1

$\alpha = 0.05$

$n = 10$

$S^2 = 30 / (n - 1)$

$q_2 = qchisq(1 - \alpha / 2, n - 1)$

$q_1 = qchisq(\alpha / 2, n - 1)$

$L = (n - 1) * S^2 / q_2$

$U = (n - 1) * S^2 / q_1$

$c(L, U)$ # 1.5 - 11.1

q_1 # 2.7

q_2 # 19

ES. 2

$y = 36$

$n = 18$

$z = 1$

$m = y / n$

m

$L = m - z * 1 / \sqrt{n}$

$U = m + z * 1 / \sqrt{n}$

$c(L, U)$ # 1.7 - 2.2

Es. 3

$n = 16$

$m = 0.7$

$th.0 = 0.2$

$\sigma = 1$

$W = \sqrt{n} * (m - th.0) / \sigma$

W # 2

Es. 4

$n = 4$

$m = 4$

$th.0 = 4$

$\sigma = 1$

$W = \sqrt{n} * (m - th.0) / \sigma$

W

$p.value = pnorm(0)$ # 0.5

$p.value > 0.05$ # accetto H_0 se TRUE

Es. 5

$dpois(0, 6) + dpois(1, 6)$

ovvero

$\exp(-6) * 7$ # 0.017

Es. 6-10 --> vedi altro foglio soluzioni

```

# PARTE B

# Es. 5, 6, 9, 10
# Es. 5
n=20
T=80
smv=n/T
smv      # 0.25
v.as.hat=n/T^2
v.as.hat  # 0.003
# C (es. 6)
L=smv-1.96*smv/sqrt(n)
L
U=smv+1.96*smv/sqrt(n)
U
# 0.14 - 0.35
# Test (Es. 9)
th.0=2/5
w.0=sqrt(n)*(smv-th.0)/th.0
w.0      # -1.677
# Test (Es. 10)
w.0 < 1.645 # Rif se TRUE

```