Inferenza Statistica - Prova di Teoria, parte 2 – a.a. 2018-2019 - 01 giugno 2019

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________________

1. **Rispondere ai seguenti quesiti a risposta multipla**

   (a) Date $Z_1, \ldots, Z_k \sim \mathrm{N}(0,1)$ indipendenti, $U = Z_1^2$ e $V = \sum_{i=2}^{k} Z_i^2$, la distribuzione di $(k-1)U/V$ è:
   ☐ $\mathrm{F}_{k-1,1}$; ♣ $\mathrm{F}_{1,k-1}$; ☐ $\mathrm{F}_{1,k}$; ☐ χ^2_{k-1}; ☐ t_{k-1}.

   (b) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta,1)$ i.i.d. – nel test $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ la statistica test $W = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)$ ha, sotto ipotesi nulla, distribuzione:
   ☐ $\mathrm{N}(\theta_0, 1)$; ☐ $\mathrm{N}(\theta_0, 1/n)$; ♣ $\mathrm{N}(0,1)$; ☐ t_{n-1}; ☐ t_n

   (c) La probabilità di errore di II tipo (β) di un test è:
   ☐ La probabilità di accettare H_1 quando è vera H_0.
   ☐ La probabilità di rifiutare H_0 quando è falsa H_0.
   ☐ La probabilità di accettare l'ipotesi nulla.
   ☐ La probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla.
   ♣ Altro.

   (d) Se $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu,1)$ i.i.d., il livello di confidenza dell'intervallo $\overline{X}_n \pm 1/\sqrt{n}$ è pari a:
   ☐ $2\Phi(1)$ ☐ $\Phi(1)$ ☐ $2\Phi(-1)$ ♣ $1 - 2\Phi(-1)$ ☐ $1 - 2\Phi(1)$.

   (e) Quali dei seguenti valori per il p-value **non** consentono l'**accettazione** dell'ipotesi nulla per un test di ampiezza $\alpha = 0.05$? [**NB**: più di una risposta può essere esatta].
   ♣ 0.01 ☐ 0.1 ☐ 0.07 ♣ 0.001 ☐ 0.06

   (f) Se $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu,1)$ i.i.d., e se per il test $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ il valore osservato della statistica test è $w_{oss} = z_{0.025}$, allora il corrispondente p-value risulta pari a:
   ♣ 0.975; ☐ 0.025; ☐ 0.050; ☐ 0.950; ☐ 0.010.

   (g) Quali tra i seguenti p-value fornisce l'evidenza meno forte contro l'ipotesi nulla?
   ☐ $p = 0.001$; ☐ $p = 0.050$; ☐ $p = 0.010$; ☐ $p = 0.100$; ♣ $p = 0.150$.

   (h) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta,1)$ i.i.d. – Se il valore osservato della statistica test è pari a w_{oss}, quale tra le seguenti indica la condizione di **rifiuto** dell'ipotesi nulla per il test $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$?
   ☐ $w_{oss} < z_{1-\alpha}$; ☐ $|w_{oss}| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$; ☐ $w_{oss} > z_\alpha$; ♣ $w_{oss} < z_\alpha$; ☐ $w_{oss} > z_{1-\alpha}$

   (i) Si consideri un un test per confronto tra ipotesi composte con regione di rifiuto $R = \{\mathbf{x}_n : T(\mathbf{X}_n) > k\}$, dove T è una statistica test. Sia $p_\theta(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}_n) > T(\mathbf{x}_n^{oss}))$. Quale delle seguenti è la definizione risulta coerente con la definizione di p-value?
   ☐ $\inf_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(\mathbf{x}_n)$; ☐ $\inf_{\theta \in \Theta_1} p_\theta(\mathbf{x}_n)$; ♣ $\sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(\mathbf{x}_n)$; ☐ $\sup_{\theta \in \Theta_1} p_\theta(\mathbf{x}_n)$; ☐ altro

2. **Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false**

(a) Nel modello $\mathrm{N}(\mu, \theta)$, lo stimatore $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2/(n-1)$ di θ è ammissibile. $\square$ **V** $\clubsuit$ **F**

(b) Il coefficiente di confidenza di uno stimatore intervallare di un parametro di un modello (uniparametrico) non dipende dal parametro stesso.

$\clubsuit$ **V** $\square$ **F**

(c) Se $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ i.i.d., la quantità pivotale $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta)$ per determinare un intervallo di confidenza per θ ha distribuzione t_{n-1}.

$\square$ **V** $\clubsuit$ **F**

(d) I modelli uniparametrici hanno rapporto delle verosimiglianze monotono rispetto a una statistica T solo se sono membri della famiglia esponenziale. $\square$ **V** $\clubsuit$ **F**

(e) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. - Se rifiuto $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu \neq 0$ con $\alpha = 0.05$, l'estremo superiore del corrispondente intervallo di confidenza (centrale) di livello 0.95 può risultare minore di zero.

$\clubsuit$ **V** $\square$ **F**

(f) Se si rifiuta l'ipotesi nulla in un test di ampiezza α, il corrispondente p-value è minore di α. $\clubsuit$ **V** $\square$ **F**

(g) La distribuzione di probabilità di una quantità pivotale dipende da $\mathbf{X}_n$ e da θ

$\square$ **V** $\clubsuit$ **F**

(h) Nel confronto tra ipotesi semplici $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ la potenza del test viene calcolata utilizzando la distribuzione campionaria dei dati ottenuta ponendo $\theta = \theta_1$.

$\clubsuit$ **V** $\square$ **F**

(i) Il test di Wald è un test asintotico che si usa solo nel campionamento da popolazioni normali.

$\square$ **V** $\clubsuit$ **F**

(j) Si consideri un modello con rapporto delle verosimiglianze monotono rispetto a una statistica sufficiente e con stimatore di massima verosimiglianza, $\widehat{\theta}_{mv}$. Il test UMP per il confronto tra ipotesi composte (di qualsiasi tipo) esiste sempre, è fornito dal teorema di Karlin-Rubin e si può esprimere in funzione di $\widehat{\theta}_{mv}$.

$\square$ **V** $\clubsuit$ **F**