Tutti i Canali.

**!ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI!**

Cognome e Nome: _____ Canale: _____

Esercizio 1. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale proveniente dalla popolazione con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < \theta, \quad \theta > 0.$$

1. Verificare che

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}\theta, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{4}{45}\theta^2$$

e che lo stimatore dei momenti di θ è

$$\hat{\theta}_M = 3\bar{X}_n$$

Svolgimento.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\theta x \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\theta^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^\theta = \frac{\theta}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\theta^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{5}$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{\theta^2}{5} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}\theta^2$$

Per determinare lo stimatore dei momenti, si eguaglia la media campionaria al valore atteso:

$$\bar{X}_n = \mathbb{E}[X] \iff \bar{X}_n = \frac{\theta}{3} \iff \hat{\theta}_M = 3\bar{X}_n$$

2. Determinare l'errore quadratico medio dello stimatore dei momenti e studiarne la consistenza.

Svolgimento.

Si verifica facilmente che lo stimatore dei momenti è non distorto, quindi l'errore quadratico medio è uguale alla varianza:

$$MSE(\hat{\theta}_M) = \mathbb{V}(\hat{\theta}_M) = \mathbb{V}(3\bar{X}_n) = 9 \frac{\mathbb{V}(X)}{n} = 9 \frac{4}{45} \frac{1}{n} \theta^2 = \frac{4\theta^2}{5n}$$

Poiché l'errore quadratico medio tende a 0 per $n \rightarrow \infty$ possiamo concludere che lo stimatore dei momenti è consistente.

3. Determinare la distribuzione asintotica dello stimatore $\hat{\theta}_M$ e l'intervallo di confidenza asintotico per θ , assumendo come stima di $\mathbb{V}[X]$ la quantità ottenuta sostituendo a θ lo stimatore dei momenti.

Svolgimento.

Ricordando che $\bar{X}_n \approx N\left(\mathbb{E}[X], \frac{\mathbb{V}[X]}{n}\right)$ (Teorema del Limite Centrale), si ricava facilmente la distribuzione asintotica dello stimatore dei momenti:

$$\hat{\theta}_M = 3\bar{X}_n \approx N\left(3\mathbb{E}[X], 9\frac{\mathbb{V}[X]}{n}\right) \approx N\left(\theta, \frac{4\theta^2}{5n}\right)$$

Assumendo come stima della varianza $\frac{4\hat{\theta}_M^2}{5n}$, possiamo trovare l'intervallo di confidenza asintotico per θ :

$$\tilde{IC}_{1-\alpha}(\theta) = \hat{\theta}_M \pm z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{4\hat{\theta}_M^2}{5n}} = 3\bar{X}_n \pm z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{4(3\bar{X}_n)^2}{5n}} =$$

4. Determinare la stima dei momenti e l'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha = 0.95$ supponendo di avere osservato un campione di dimensione $n = 36$ per il quale $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{3}$.

Svolgimento.

La stima dei momenti

$$\hat{\theta}_M = 3\bar{x}_n = 3\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 3\frac{1}{3 \cdot 36} = \frac{1}{36} = 0.028$$

e l'intervallo di confidenza asintotico a livello 0.95:

$$\tilde{IC}_{1-\alpha}(\theta) = \frac{1}{36} \pm 1.96 \sqrt{4\frac{(1/36)^2}{5 \cdot 36}} = [0.0197; 0.0359]$$

Esercizio 2. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale proveniente dalla popolazione con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0, \quad \text{dove} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{\theta^2}.$$

Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0: \theta = \theta_0, \quad H_1: \theta = \theta_1, \quad (\theta_0 > \theta_1).$$

1. Verificare che la regione di accettazione del test di Neyman-Pearson risulta essere l'insieme

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \bar{x}_n < k\}, \quad k > 0$$

Svolgimento.

Applicando il Lemma di Neyman-Pearson, la regione di accettazione sarà del tipo

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \frac{L(\theta_0; \mathbf{x})}{L(\theta_1; \mathbf{x})} \geq c\}.$$

Per il modello considerato la verosimiglianza risulta essere

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (\theta e^{-\theta x_i}) \propto \theta^n \exp \left\{ -\theta \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

e quindi si ha:

$$\frac{L(\theta_0; \mathbf{x})}{L(\theta_1; \mathbf{x})} = \frac{\theta_0^n \exp \left\{ -\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i \right\}}{\theta_1^n \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right\}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Dal momento che $-(\theta_0 - \theta_1) < 0$ il rapporto delle verosimiglianze è funzione decrescente di $\sum_{i=1}^n x_i$ (o equivalentemente di $\bar{x}_n$) e dunque possiamo concludere che la regione di accettazione è del tipo

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i < k'\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \bar{x}_n < k\}$$

2. Determinare la distribuzione asintotica di $\bar{X}_n$.

Svolgimento.

$$\bar{X}_n \approx N \left(\mathbb{E}[X], \frac{\mathbb{V}[X]}{n} \right) \approx N \left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{n \cdot \theta^2} \right)$$

3. Verificare che, utilizzando la distribuzione asintotica di $\bar{X}_n$, il valore di k per il quale la probabilità di errore di I specie del test (vedi il punto 1.) è pari ad α è

$$k_\alpha = \frac{1}{\theta_0} + \sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}} z_{1-\alpha}.$$

Determinare il valore di k_α per $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 2$ e $n = 25$.

Svolgimento.

Fissando α e utilizzando la regione di accettazione di cui al punto 1 si ha

$$\alpha = P(\mathbf{X} \in R = A^c | H_0) = P(\bar{X}_n > k | \theta = \theta_0).$$

Sotto H_0 vale la distribuzione asintotica di cui al punto 2, e standardizzando si ha:

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}} > \frac{k - \frac{1}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{k - \frac{1}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}}\right) \iff 1 - \alpha = \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}}\right)$$

Applicando la funzione inversa alla funzione di ripartizione si ottiene:

$$\frac{k - \frac{1}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}} = z_{1-\alpha}$$

da cui si ricava

$$k_\alpha = \frac{1}{\theta_0} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}.$$

Per $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 2$ e $n = 25$, si ha

$$k_\alpha = \frac{1}{2} + 1.64 \sqrt{\frac{1}{25 \cdot 4}} = 0.664.$$

4. Determinare la potenza del test considerato, assumendo $\theta_1 = 1$.

Svolgimento.

La potenza, in corrispondenza dell'ipotesi alternativa semplice $\theta_1 = 1$, risulta essere

$$1 - \beta = P(\mathbf{X} \in R = A^c | H_1) = P(\bar{X}_n > k_\alpha | \theta = \theta_1) = 1 - \Phi\left(\frac{0.664 - 1}{\sqrt{\frac{1}{25}}}\right) = 1 - \Phi(-1.68) = 0.9535$$

5. Stabilire se, per un campione osservato di dimensione $n = 25$ e con media campionaria pari a 1.5, l'ipotesi nulla viene accettata o rifiutata.

Svolgimento.

Poiché il valore osservato della media campionaria $\bar{x}_{25} = 1.5 > k_\alpha = 0.664$ cade nella regione di rifiuto, si rifiuta l'ipotesi nulla a livello $\alpha = 0.05$.