

Verifica n. 2 - 27 maggio 2005

COMPITO A

COGNOME E NOME _____

Esercizio 1. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale da una popolazione $N(\theta, 1)$. Si consideri la seguente famiglia di stimatori del parametro incognito θ :

$$T_a(\mathbf{X}_n) = \omega_n \bar{X}_n + (1 - \omega_n)a, \quad a \in \mathbb{R},$$

definita come media ponderata dello stimatore UMVUE, $\bar{X}_n$, e della costante reale a , con pesi $\omega_n = n/(n+1)$ e $1 - \omega_n = 1/(n+1)$.

- a) Per gli stimatori T_a , determinare distorsione, varianza ed errore quadratico medio e studiarne la consistenza.
- b) Stabilire se esistono dei valori di θ per i quali lo stimatore T_a , ottenuto ponendo $a = 0$, risulta migliore di $\bar{X}_n$.
- c) Per i due stimatori considerati al punto (b) (ovvero T_0 e $\bar{X}_n$), tracciare i grafici (approssimativi) delle due funzioni MSE, al variare di θ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento.

a)

$$\begin{aligned} D[T_a] = E[T_a] - \theta &= \omega_n \theta + (1 - \omega_n)a - \theta = -\theta(1 - \omega_n) + (1 - \omega_n)a = (1 - \omega_n)(a - \theta) = \frac{1}{n+1}(a - \theta), \\ \mathbb{V}[T_a] &= \omega_n^2 \frac{1}{n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{1}{n} = \frac{n}{(n+1)^2}, \\ \text{MSE}[T_a] &= \frac{4}{(n+1)^2}(a - \theta)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi gli stimatori sono consistenti in media quadratica.

b)

$$T_0(\mathbf{X}_n) = \frac{n}{n+1} \bar{X}_n \quad \text{MSE}(T_0) = \frac{4}{(n+1)^2} \theta^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \quad \text{MSE}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}$$

Quindi T_0 è migliore di $\bar{X}$ per

$$\theta^2 \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$$

Esercizio 2. Si ipotizza che il tempo medio di attesa dei clienti di una banca nell'ora di punta sia una variabile aleatoria normale di varianza nota pari a 4. Per un campione casuale di 16 clienti si è rilevato un tempo medio di attesa di 5.5 minuti.

- a) Sottoporre a verifica l'ipotesi che il tempo medio di attesa θ sia inferiore 5 minuti contro l'ipotesi che θ sia maggiore di 5 minuti, ad un livello $\alpha = 0.01$ e rappresentare graficamente la regione di rifiuto del test.
- b) Determinare il valore p e rappresentarlo graficamente.

Svolgimento.

a)

$$\begin{cases} H_0 : \theta < \theta_0 = 5 \\ H_1 : \theta > \theta_0 = 5 \end{cases}; \quad R = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) > z_{1-\alpha}\}; \quad \alpha = 0.01, \quad z_{0.99} = 2.32$$

$$T(\mathbf{x}) = \frac{5.5 - 5}{2/4} = \frac{0.5}{1/2} = 1 < z_{1-\alpha} = 2.32$$

quindi si accetta H_0 .

b) Il valore-p si ottiene calcolando:

$$Pr\{T(\mathbf{x}) > 1 | \theta = \theta_0\} = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84 = 0.16.$$

Esercizio 3. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale da una popolazione di Poisson di parametro θ . Per la quantità $g(\theta) = e^{-\theta}$:

a) determinare lo stimatore di massima verosimiglianza, $\widehat{g(\theta)}$;

b) verificare che

$$\widehat{g(\theta)} \sim N(e^{-\theta}, V[\widehat{g(\theta)}]), \quad \text{dove} \quad V[\widehat{g(\theta)}] = e^{-2\theta} \frac{\theta}{n};$$

c) determinare una stima per $V[\widehat{g(\theta)}]$, varianza asintotica di $\widehat{g(\theta)}$;

d) determinare un intervallo di confidenza approssimato al 95%;

e) determinare la stima di massima verosimiglianza e gli estremi dell'intervallo di confidenza al 95% per il seguente campione osservato:

$$x_1 = \dots = x_5 = 2, \quad x_6 = \dots = x_{10} = 1, \quad x_{11} = \dots = x_{15} = 3, \quad x_{16} = \dots = x_{25} = 4.$$

Svolgimento.

a)

$$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = e^{-\bar{X}}$$

b)

$$\widehat{g(\theta)} \approx N\left(g(\theta), [g'(\theta)]^2 I^{-1}(\theta)\right)$$

Dato che

$$I(\theta) = \frac{n}{\theta}, \quad g'(\theta) = -e^{-\theta}, \quad [g'(\theta)]^2 = e^{-2\theta},$$

si ha

$$\widehat{g(\theta)} \approx N\left(e^{-\theta}, e^{-2\theta} \frac{\theta}{n}\right)$$

c)

$$V[\widehat{g(\theta)}] \approx e^{-2\bar{X}} \frac{\bar{X}}{n}$$

d)

$$IC_{(1-\alpha)}(\mathbf{X}) \approx g(\hat{\theta}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\widehat{g(\theta)})} = e^{-\bar{x}} \pm 1.96 e^{-2\bar{x}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}.$$

Dato che $\bar{x} = 2.8$, l'intervallo è: $IC = (0.058, 0.063)$.