

1. Criterio MSE

- $\mathcal{D}$ = classe di tutti gli stimatori $\hat{\theta}(\mathbf{X}_n)$ di θ
- Errore quadratico medio (MSE) di $\hat{\theta}$

$$\text{MSE}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbb{V}_{\theta}[\hat{\theta}] + B_{\theta}^2(\hat{\theta})$$

- Confronto tra stimatori

$$\hat{\theta}_1 \succeq \hat{\theta}_2 \iff \text{MSE}(\theta, \hat{\theta}_1) \leq \text{MSE}(\theta, \hat{\theta}_2) \quad \forall \theta \in \Theta$$

(si ha che $\hat{\theta}_1 \succ \hat{\theta}_2$ se la disuguaglianza tra gli MSE è stretta per almeno un valore di θ)

- $\text{MSE}(\theta, \hat{\theta})$ varia con θ : è una funzione e non un singolo numero reale
- La classe $\mathcal{D}$ è troppo grande e in genere non esiste uno stimatore $\hat{\theta}^*$ tale che $\hat{\theta}^* \succeq \hat{\theta}$, per ogni altro $\hat{\theta} \in \mathcal{D}$ (in quanto **le funzioni MSE si intersecano** al variare di θ)
- Il teorema di Rao-Blackwell [vedi sotto] ci dice però che dobbiamo scegliere stimatori in $\mathcal{D}_S$, ovvero funzioni delle statistiche sufficienti del modello in quanto per ogni $\hat{\theta} \notin \mathcal{D}_S$ esiste uno stimatore $\hat{\theta}'(t) \in \mathcal{D}_S$ tale che $\hat{\theta}' \succeq \hat{\theta}$ ($\hat{\theta}'$ è lo stimatore di RB)
- Anche la classe $\mathcal{D}_S$ è troppo grande:
 - in genere non esiste un elemento di $\mathcal{D}_S$ migliore in MSE di tutti gli altri
 - se pure esiste, non lo so trovare
- Per scegliere tra stimatori, posso ricorrere ai **criteri di ottimalità**, quali ad esempio
 - criterio del minimax
 - criterio del valore atteso
- Se non ricorro ai criteri di ottimalità, soluzione pragmatica: scegliamo $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$, in quanto
 - $\hat{\theta}_{mv} \in \mathcal{D}_S$ (sempre funzione della statistica sufficiente minimale)
 - $\hat{\theta}_{mv}$ ha buone proprietà:
 - equivarianza
 - proprietà asintotiche [ancora non le abbiamo studiate]

2. UMVUE [Uniformly minimum variance unbiased estimator]

- Si restringe l'attenzione alle sottoclassi degli stimatori non distorti di θ o di $g(\theta)$
- $\hat{\theta}_u \in \mathcal{D}_U \implies \begin{cases} \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}_u] = \theta & \forall \theta \\ \text{MSE}(\theta, \hat{\theta}_u) = \mathbb{V}_{\theta}[\hat{\theta}_u] \end{cases}$
- $\hat{\theta}_{u_g} \in \mathcal{D}_{U_g} \implies \begin{cases} \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}_{u_g}] = g(\theta) & \forall \theta \\ \text{MSE}(\theta, \hat{\theta}_{u_g}) = \mathbb{V}_{\theta}[\hat{\theta}_{u_g}] \end{cases}$ (nota che MSE dipende sempre da θ , che è il parametro del modello di partenza)
- Ragioniamo ora su $\mathcal{D}_U \subset \mathcal{D}$; le estensioni a $\mathcal{D}_{U_g}$ sono immediate [vedi sotto]
- La restrizione a $\mathcal{D}_U$ viene fatta con la speranza di poter trovare un ottimo in $\mathcal{D}_U$, cosa che non si riesce a fare in $\mathcal{D}$ o in $\mathcal{D}_S$

- $\hat{\theta}_u^*$ è UMVUE se

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_u^*] = \theta & \forall \theta \\ \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_u^*] \leq \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_u] & \forall \theta, \quad \forall \hat{\theta}_u \in \mathcal{D}_U \end{cases}$$
- Ricerca UMVUE
 - procedura di Cramer-Rao [verifica]
 - procedura di Rao-Blackwell (costruzione) e Lehmann-Scheffe [unicità]

3. Procedura di Cramer-Rao [per stimatori non distorti di θ]

- problemi regolari di stima regolari
 - supporto di X indipendente da θ
 - derivabilità fino al secondo ordine di $f_n(\mathbf{x}_n; \theta)$ rispetto a θ
 - (si aggiunge inoltre la scambiabilità tra integrale e derivate rispetto a θ ; vale per i modelli che consideriamo noi)
- Disuguaglianza e limite inferiore di CR

$$\hat{\theta}_u \in \mathcal{D}_U \implies \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_u] \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \text{cr}(\theta)$$

[usare questa definizione negli esercizi]

- $\text{cr}(\theta)$ = LICR (limite inferiore di Cramer-Rao)
- $I_n(\theta)$ = Informazione attesa di Fisher
 - è una funzione di θ ed è quindi non nota
 - è specifica di ogni modello (ogni modello ha la sua)
- Definizioni di $I_n(\theta)$
 - $I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_n(\mathbf{X}_n; \theta) \right)^2 \right] \rightarrow$ per campioni generali (no iid)
 - $I_n(\theta) = -n \mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X; \theta) \right] \rightarrow$ per campioni casuali (iid)
- Uso del LICR
 - Considero $\hat{\theta}_u \in \mathcal{D}_U$ candidato ad essere UMVUE
 - Se $\mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_u] = \text{cr}(\theta) = I_n(\theta)^{-1}$, allora $\hat{\theta}_u$ è sicuramente UMVUE di θ
 - Se $\mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_u] > \text{cr}(\theta) = I_n(\theta)^{-1}$, non posso dire che $\hat{\theta}_u$ è UMVUE ma non posso neanche escluderlo
 - L'uguaglianza si ha sicuramente $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & f_X(x; \theta) \text{ è una famiglia esponenziale} \\ \text{(ii)} & \hat{\theta}_u \text{ e } S_n(\mathbf{X}_n; \theta) \text{ sono in relazione lineare tra loro} \end{cases}$
 - Si ha l'uguaglianza, ad esempio, per i modelli Ber, Bin, Pois, Exp, N1, N3
 - non si ha per il modello EN [non vale la condizione (ii)]
- Limiti applicativi LICR
 - modelli non regolari
 - $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ in $\text{Unif}[0, \theta]$
 - modelli regolari in cui non si raggiunge il LICR
 - $\frac{n-1}{n \bar{X}_n}$ in $\text{EN}(\theta)$ [modello con un parametro, $k = 1$]
 - S_n^2 in $\text{N}(\theta_1, \theta_2)$ [modello con due parametri, $k = 1$]

4. Procedura di Rao-Blackwell e Lehmann-Scheffe [UMVUE per θ]

- Statistica completa. T è completa se per ogni $q(\cdot)$ tale che $\mathbb{E}_\theta[q(T) = 0]$ si ha che $\mathbb{P}_\theta[q(T) = 0] = 1 \forall \theta$
 - Sono complete tutte le statistiche sufficienti minimali delle famiglie esponenziali (per $k \geq 1$)
 - Sono complete le statistiche sufficienti minimali dei modelli con supporto dipendente da θ (ad es. $X_{(n)}$ nel modello $\text{Unif}[0, \theta]$ oppure $X_{(1)}$ nel modello $\text{Unif}[\theta, b]$)

• **Teorema RB-LS**

Sia T una statistica sufficiente e completa per il modello. Allora $\hat{\theta}_u^*$ è UMVUE unico per θ se

$$\hat{\theta}_u^* \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{D}_U$$

$$\text{ovvero se } \begin{cases} \hat{\theta}_u^*(\mathbf{x}_n) = \hat{\theta}_u^*(t) & \text{funzione della stat. sufficiente e completa} \\ \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_u^*(\mathbf{X}_n)] = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_u^*(T)] = \theta & \forall \theta \end{cases}$$

5. **Estensioni al caso di funzioni del parametro**

(ricerca UMVUE per stimatori non distorti di $g(\theta)$)

- Procedura di CR
 - modelli regolari, $g(\cdot)$ derivabile
 - Disuguaglianza di Cramer-Rao e LICR

$$\hat{\theta}_{u_g} \in \mathcal{D}_{U_g} \implies \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_{u_g}] \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I_n} = \text{cr}(g(\theta))$$

ovvero, come nel caso semplice, $\hat{\theta}_{u_g}$ è UMVUE di $g(\theta)$ se

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{u_g}] = g(\theta) & \forall \theta \\ \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_{u_g}] = \text{cr}(g(\theta)) & \forall \theta \end{cases}$$

- Procedura di RB-LS

Sia T una statistica sufficiente e completa per il modello. Allora $\hat{\theta}_{u_g}^*$ è UMVUE unico per $g(\theta)$ se

$$\hat{\theta}_{u_g}^* \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{D}_{U_g}$$

$$\text{ovvero se } \begin{cases} \hat{\theta}_{u_g}^*(\mathbf{x}_n) = \hat{\theta}_{u_g}^*(t) & \text{funzione della stat. sufficiente e completa} \\ \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{u_g}^*(\mathbf{X}_n)] = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{u_g}^*(T)] = g(\theta) & \forall \theta \end{cases}$$

- Conseguenza pratica di RB-LS: ogni funzione di statistica sufficiente e completa è UMVUE del proprio valore atteso

6. **Ammissibilità e inammissibilità**

- Uno stimatore $\hat{\theta}$ di θ è ammissibile se non esiste nessuno stimatore $\hat{\theta}'$ di θ tale che $\hat{\theta}' \succ \hat{\theta}$
- Uno stimatore $\hat{\theta}$ di θ è inammissibile se esiste uno stimatore $\hat{\theta}'$ di θ tale che $\hat{\theta}' \succ \hat{\theta}$
- Gli UMVUE possono essere inammissibili

Esempi notevoli:

- $N(0, \theta)$: si ha che $\frac{n}{n+2}S_0^2 \succ S_0^2$ (UMVUE e SMV di θ inammissibile nel problema N3)
- $\text{Unif}[0, \theta]$: si ha che $\frac{n+2}{n+1}X_{(n)} \succ \frac{n}{n+1}X_{(n)}$ (UMVUE di θ inammissibile)
- $N(\theta_1, \theta_2)$: si ha che $\hat{\sigma}_n^2 \succ S_n^2$ (UMVUE di θ_2 nel problema N2)
- Interpretazione: in $\mathcal{D}_S - \mathcal{D}_U$ ci possono essere stimatori *migliori* in MSE dell'unico stimatore in $\mathcal{D}_S \cap \mathcal{D}_U$, ovvero dell'UMVUE