

Cognome, nome e n. di matricola: _____

- Si corregge solo quanto riportato in questi fogli
- Gli studenti che hanno diritto alla riduzione del compito possono saltare i quesiti *

Problema 1. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{2}{\theta - 1} e^{-\frac{2}{\theta - 1}x}, \quad x > 0, \quad \theta > 1$$

1. Verificare se il modello per la singola osservazione X_i appartiene alla classe delle famiglie esponenziali.

Risp. _____

2. Determinare il modello statistico per l' n -pla campionaria $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$, il nucleo della funzione di verosimiglianza per θ e la statistica sufficiente minimale $T(\mathbf{X}_n)$ per θ .

Risp. _____

3. Determinare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$.

Risp. _____

4. Verificare che l'informazione osservata di Fisher corrisponde alla seguente espressione: $I_{oss} = \frac{n}{4X_n^2}$.

Risp. _____

5. Determinare l'espressione dell'insieme approssimato di verosimiglianza di livello $q = 0.5$ per θ (basato su approssimazione normale di $\bar{L}(\theta; \mathbf{x}_n)$).

Risp. _____

Problema 2. Sia X una v.a. con funzione di densità $f_X(x) = 3x^2 I_{[0,1]}(x)$.

1. Calcolare $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ e $\mathbb{V}(X)$.

Risp. _____

2. Calcolare $q_{0.5}$, quantile di livello 0.5 di X (mediana).

Risp. _____

3. Determinare $g_s(x; \theta)$, generica densità della famiglia di scala che si ottiene da f_X per $\theta > 0$.

Risp. _____

4. Supporre che $Y \sim g_s(\cdot; \theta)$. Determinare $\mathbb{E}_\theta(Y)$ e $\mathbb{V}_\theta(Y)$.

Risp. _____

5. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ , una statistica sufficiente minimale e la stima di massima verosimiglianza di θ .

Risp. _____

6. Determinare la funzione di verosimiglianza relativa di θ e l'espressione di $L_q(\mathbf{x}_n)$, insieme di verosimiglianza di livello $q \in (0, 1)$ per θ . Fornire risultati analitici e rappresentazione grafica.

Risp. _____

