

Cognome, nome e n. di matricola: _____

- Si corregge solo quanto riportato in questi fogli

- Gli studenti che hanno diritto alla riduzione del compito possono saltare i quesiti 8 e 9

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia $X|\theta \sim \text{Pois}(2\theta)$. Determinare l'espressione di $\tau(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X = 0)$ e stabilire per quali valori di θ tale probabilità risulta minore o uguale a $\frac{1}{3}$.

Soluzione.

- $f_X(x; \theta) = \frac{1}{x!} e^{-2\theta} (2\theta)^x$ e quindi $\mathbb{P}_\theta(X = 0) = e^{-2\theta}$.
- $\mathbb{P}_\theta(X = 0) = e^{-2\theta} \leq \frac{1}{2} \iff -2\theta \leq -\ln 2 \iff \theta \geq \frac{1}{2} \ln 2$.

2. Sia (X_1, X_2, X_3) un campione casuale con ciascuna X_i avente distribuzione indicata nel precedente esercizio. Fornire le stime di massima verosimiglianza di θ e di $\tau(\theta)$ che si ottengono per il campione osservato $(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 6)$.

Soluzione.

- Se si pone $\lambda = 2\theta$, poichè $\hat{\lambda}_{mv} = \bar{x}_n$, per invarianza della smv si ha che $\hat{\theta}_{mv} = \frac{\bar{x}_n}{2} = \frac{3}{2}$.
- $\hat{\tau} = e^{-2\theta} = e^{-\bar{x}_n} = e^{-3}$.

3. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità $f_X(x) = ax \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, $a > 0$. Determinare il valore di a affinché $f_X(x)$ sia una funzione di densità in $[0, 1]$.

Soluzione.

$$\int_0^1 ax \, dx = 1 \iff a = \int_0^1 x \, dx \iff a = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \iff a = 2. \text{ Pertanto } f_X(x) = 2x\mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

4. Con riferimento al precedente esercizio, determinare l'espressione della famiglia di scala $g_s(\cdot; \theta)$ che si ottiene utilizzando $f_X(x)$ come funzione di densità standard e $\theta > 0$ come parametro di scala.

Soluzione.

$$g_s(x; \theta) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{x}{\theta}\right) = \frac{2}{\theta} \frac{x}{\theta} \mathbb{I}_{[0,1]}\left(\frac{x}{\theta}\right) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x).$$

5. Con riferimento ai precedenti esercizi, determinare il valore atteso della v.a. X e della v.a. Y con funzione di densità $g_s(y; \theta)$.

Soluzione.

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.
- $Y \sim g_s(\cdot; \theta) \iff Y = \theta X$. Pertanto $\mathbb{E}_\theta(Y) = \frac{2}{3} \theta$.

6. Sia $X|\theta \sim \text{Unif}[\theta, 2]$, $\theta < 2$. Determinare l'espressione di $f_X(x; \theta)$, $\mathbb{E}_\theta[X]$ e $\mathbb{V}_\theta[X]$ (funzione di densità, valore atteso e varianza di X).

Soluzione.

Ricordare che: $Y \sim \text{Unif}[a, b] \implies f_Y(y; \theta) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y)$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2}$ e $\mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

In questo caso, quindi, $f_X(x; \theta) = \frac{1}{2-\theta} I_{[\theta,2]}(x)$, $\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta+2}{2}$ e $\mathbb{V}_\theta(X) = \frac{(2-\theta)^2}{12}$.

Oppure si rifanno tutti i calcoli ...

7. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale da una popolazione con distribuzione $\text{Unif}[\theta, 2]$, $\theta < 2$ (come nel precedente esercizio). Determinare la funzione di verosimiglianza di θ , una statistica sufficiente minimale e la stima di massima verosimiglianza di θ .

Soluzione.

- $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2-\theta} I_{[\theta,2]}(x_i) = \frac{1}{(2-\theta)^n} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)$.

- $L(\theta)$ è crescente in θ in $(-\infty, x_{(1)})$ e nulla in $(x_{(1)}, 2)$; pertanto $\hat{\theta}_{mv} = x_{(1)}$.

- Per il criterio di fattorizzazione $x_{(1)}$ è statistica sufficiente minimale (ha partizione coincidente con quella di verosimiglianza).

8. Con riferimento al precedente esercizio, determinare la funzione di verosimiglianza relativa di θ e l'espressione di $L_q(\mathbf{x}_n)$, insieme di verosimiglianza di livello $q \in (0, 1)$ per θ . Fornire risultati analitici e rappresentazione grafica.

Soluzione.

- $\bar{L}(\theta) = \left[\frac{2-x_{(1)}}{2-\theta} \right]^n I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)$

- $\bar{L}(\theta) \geq q \iff \begin{cases} \left[\frac{2-x_{(1)}}{2-\theta} \right]^n \geq q \\ \theta \leq x_{(1)} \end{cases} \iff \theta \in [2 - q^{-1/n}(2 - x_{(1)}), x_{(1)}] = L_q(\mathbf{x}_n)$.

- Rappresentazione grafica: $\bar{L}(\theta)$ è positiva e crescente in $(-\infty, x_{(1)})$ e vale zero per $\theta > x_{(1)}$. In $x_{(1)}$ la funzione $\bar{L}(\cdot)$ vale 1.

Funzione R per rappresentazione grafica

```
L.rel=function(theta, xn){
  n=length(xn)
  x.1=min(xn)
  0*(theta>min(xn)) + (((2-x.1)/(2-theta))^n)*(theta<=x.1)
}
# ad esempio con i dati seguenti
dati=c(-2,2,3,-2,5)
curve(L.rel(x,dati),from=-4,to=1,xlab=expression(theta),ylab="verosim. relativa")
# per insieme di verosimiglianza Lq
q=0.7
abline(h=q)
n=length(dati)
# estremo inferiore insieme Lq
L.n=2-q^(-1/n)*(2-min(dati))
abline(v=L.n)
```

9. Siano X_1 e X_2 due v.a. con distribuzione $\text{Ber}(\theta)$ indipendenti tra loro. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $U = (2X_1 - X_2)$ [ovvero: riportare in una tabella i valori che U può assumere e con quali probabilità].

Soluzione. Poichè X_1 e X_2 possono entrambe assumere i valori $\{0, 1\}$, $Y = 2X_1 - X_2$ assume i valori $\{-1, 0, 1, 2\}$. In particolare, tenendo conto della indipendenza e somiglianza di X_1 e X_2 , si ha che

x_1	x_2	y	$\mathbb{P}_\theta(Y = y)$
0	0	0	$(1 - \theta) \times (1 - \theta)$
0	1	-1	$(1 - \theta) \times \theta$
1	0	2	$\theta \times (1 - \theta)$
1	1	1	$\theta \times \theta$

Riassumendo e ordinando

y	$\mathbb{P}_\theta(Y = y)$
-1	$\theta(1 - \theta)$
0	$(1 - \theta)^2$
1	θ^2
2	$\theta(1 - \theta)$