Inferenza statistica – Esonero 1, Parte B2 – 15 aprile 2023 – ♠

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________________

[**SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI**]

B – Problema.
Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{2\theta x}{(1+x^2)^{\theta+1}}, \qquad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

Per lo svolgimento di alcuni dei quesiti successivi sarà utile il seguente risultato: la variabile aleatoria $Y = \ln(1+X^2)$ ha la seguente distribuzione: $f_Y(y;\theta) = \theta e^{-\theta y} I_{(0,\infty)}(y)$.

1. Verificare se il modello per la singola osservazione X_i appartiene alla classe delle famiglie esponenziali.

   Risp. ______________________________

2. Determinare il modello statistico per l'n-pla campionaria $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots X_n)$.

   Risp. ______________________________

3. Individuare una statistica sufficiente e minimale per il modello fornendo l'opportuna argomentazione.

   Risp. ______________________________

4. Sia $n = 1$ e $x_1 = 1$. Stabilire quale tra i seguenti valori di θ risulta più plausibile: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$.

   Risp. ______________________________

5. Determinare $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza del parametro θ del modello.

   Risp. ______________________________

6. Determinare l'informazione osservata di Fisher.

Risp. ______________________________

7. Determinare l'espressione dell'insieme approssimato di verosimiglianza di livello q per θ, basato sull' approssimazione normale di $\overline{L}(\theta; \mathbf{x}_n)$.

Risp. ______________________________

8. Studiare la proprietà di non distorsione per lo stimatore $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$ di massima verosimiglianza per il parametro θ.

Risp. ______________________________

9. Determinare $\widehat{\psi}_{mv}(X_1, ..., X_n)$ lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro $\psi = \frac{1}{\theta}$ e verificare se è non distorto.

Risp. ______________________________

10. Studiare le proprietà di consistenza dello stimatore $\widehat{\psi}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp. ______________________________

ESONERO 1, PARTE B2

$$f_X(x,\theta) = \frac{2\theta x}{(1+x^2)^{\theta+1}} \qquad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

① $$\underbrace{\frac{2x}{(1+x^2)}}_{h(x)} \exp\{\underbrace{\ln(\theta)}_{-B(\theta)} - \underbrace{\theta \ln(1+x^2)}_{-\eta(\theta)T(x)}\}$$

② $$\left(\mathcal{X}^n = [0,+\infty)^n, \; f_n(\underline{x}_n, \theta) = \frac{(2\theta)^n \prod_{i=1}^n x_i}{\left(\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)\right)^{\theta+1}}, \quad \Theta = (0,+\infty) \right)$$

③ Per appartenenza a fam. esponenziale
$T(\underline{x}_n) = \prod_{i=1}^n (1+x_i^2)$ è stat suff e minimale

④ $$L(\theta, \underline{x}_n) \propto g(\theta; T(\underline{x}_n)) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)\right)^\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{L(\theta_1; n=1, x_1=1)}{L(\theta_2, n=1, x_1=1)} = \frac{\frac{\theta_1}{2^{\theta_1}}}{\frac{\theta_2}{2^{\theta_2}}} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

l'uno non è più plausibile dell'altro

⑤ $$\ell(\theta; \underline{x}_n) = n \ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i^2)$$

$$\ell'(\theta; \underline{x}_n) = \frac{n}{\theta} - \sum \ln(1+x_i^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{n}{\sum \ln(1+x_i^2)}$$ p.to stazionario

$$\ell''(\theta, \underline{x}_n) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad \forall \theta$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_{MV}(\underline{x}_n) = \frac{n}{\sum \ln(1+x_i^2)}$$

⑥ $I_n^{oss} = -\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta; \underline{x}_n)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} = \frac{n}{\theta^2}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} = \frac{\left(\sum \ln(1+x_i^2)\right)^2}{n}$

⑦ $I_q = \hat{\theta}_{MV} \pm k_q \left(I_n^{oss}\right)^{-1/2} = \frac{n}{\sum \ln(1+x_i^2)} \pm k_q \left(\frac{\sum \ln(1+x_i^2)}{n}\right)^{-1/2}$

⑧ $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum \ln(1+x_i^2)}\right] = n\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum \ln(1+x_i^2)}\right]$

so che $\ln(1+X_i^2) \sim EN(\theta) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i^2) \sim Ga^R(n,\theta)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = n\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{S}\right] = n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \cdot \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\theta s} ds =$

$= n \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_{\mathbb{R}} s^{(n-1)-1} e^{-\theta s} ds = n \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \cdot s^{(n-1)-1} e^{-\theta s} ds}_{\text{INT SU } \mathbb{R} \text{ di } Ga^R(n-1,\theta)} = 1$

$= n \cdot \theta \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = \frac{n}{n-1}\theta \quad \Rightarrow$ ST.RE DISTORTO DI θ, $\forall \theta$

⑨ $\hat{\Psi}_{MV} = \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}} = \frac{\sum \ln(1+X_i^2)}{n}$

$\mathbb{E}[\hat{\Psi}_{MV}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum \ln(1+X_i^2)}{n}\right] = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \mathbb{E}[\ln(1+X_i^2)] = \frac{1}{\theta} = \Psi$

$\ln(1+X_i^2) \sim EN(\theta) \Rightarrow$ il suo val att è $1/\theta$

$\Rightarrow \hat{\Psi}_{MV}$ è st.re CORRETTO di Ψ, $\forall \Psi$

⑩ $MSE(\hat{\Psi}_{MV}) = V(\hat{\Psi}_{MV}) + B^2(\hat{\Psi}_{MV}) \overset{\text{in qst caso}}{=} V(\hat{\Psi}_{MV})$

$\Rightarrow MSE(\hat{\Psi}_{MV}) = \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} V(\log(1+X_i^2)) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{\Psi^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

var di $EN(\theta)$ è $1/\theta^2$

$\Rightarrow \hat{\Psi}_{MV}$ è consistente di Ψ