Inferenza statistica – Esonero 1, Parte B1 – 15 aprile 2023 – $\diamondsuit$

Cognome, nome e n. di matricola: ____________________________________

[**SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI**]

B – Problema.
Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\theta}+1}, \qquad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

1. Verificare se il modello per la singola osservazione X_i appartiene alla classe delle famiglie esponenziali.

   Risp.

2. Determinare il modello statistico per l'n-pla campionaria $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots X_n)$.

   Risp.

3. Individuare una statistica sufficiente e minimale per il modello fornendo l'opportuna argomentazione.

   Risp.

4. Sia $n = 1$ e $x_1 = 2$. Stabilire quale tra i due seguenti valori del parametro θ è più verosimile: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1/2$.

   Risp.

5. Determinare $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza del parametro θ del modello.

   Risp.

6. Determinare l'informazione osservata di Fisher (espressione e valore numerico).

Risp. ______________________________

7. Determinare l'espressione dell'insieme approssimato di verosimiglianza di livello q per θ, basato sull'approssimazione normale di $\overline{L}(\theta;\mathbf{x}_n)$.

Risp. ______________________________

8. Studiare la proprietà di non distorsione per lo stimatore di massima verosimiglianza $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$ del parametro θ.

   [Suggerimento: la variabile aleatoria $Y=\ln(1+X)$ ha la seguente distribuzione $f_Y(y;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}I_{(0,\infty)}(y)$.]

Risp. ______________________________

9. Studiare le proprietà di consistenza dello stimatore $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp. ______________________________

10. Determinare $\widehat{\psi}_{mv}(\mathbf{X}_n)$, stimatore di massima verosimiglianza per il parametro $\psi=\frac{1}{\theta}$, e studiarne la proprietà di non distorsione.

Risp. ______________________________

ESONERO 1, PARTE B1

$$f_X(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\theta}+1} \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad \theta > 0$$

(1) $$f_X(x;\theta) = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{h(x)} \exp\{ \underbrace{-\ln\theta}_{B(\theta)} + \underbrace{\theta \ln(1+x)}_{\eta(\theta)T(x)} \}$$

(2) $$\left(\mathcal{X}^n = [0,+\infty)^n , \; f_n = \frac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+x_i}\right)\right)^{\frac{1}{\theta}+1} , \; \Theta = (0,+\infty)\right)$$

(3) Per appartenenza a fam. esponenziale:

$$T(\underline{x}_n) = \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \quad \text{è stat suff e minimale}$$

(4) $$L(\theta;\underline{x}_n) \propto g(\theta, T(\underline{x}_n)) = \frac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}\right)^{1/\theta}$$

$$\frac{L(\theta_1; n=1, x_1=2)}{L(\theta_2; n=1, x_1=2)} = \frac{\frac{1}{\theta_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/\theta_1}}{\frac{1}{\theta_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/\theta_2}} = \frac{1/3}{2\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$$ θ_1 è più plausibile di θ_2

(5) $$\ell(\theta;\underline{x}_n) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i)$$

$$\ell'(\theta;\underline{x}_n) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum \ln(1+x_i)}{\theta^2} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum \ln(1+x_i)}{n} \quad \text{p.to stazionario}$$

$$\ell''(\theta;\underline{x}_n) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum\ln(1+x_i)}{\theta^3}\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{n^3}{(\sum\ln(1+x_i))^2} - \frac{2n^3}{(\sum\ln(1+x_i))^2} = \frac{n^3}{(\sum\ln(1+x_i))^2} < 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV}(\underline{x}_n) = \frac{\sum\ln(1+x_i)}{n}}$$

⑥ $I_n^{oss} = -\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta; x_1) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} = \left(-\frac{n}{\theta^2} + \frac{2\sum \ln(1+x_i)}{n} \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} =$

$$= \frac{n^3}{(\sum \ln(1+x_i))^2}$$

valore numerico $(n=1,\ x_1=2) \rightarrow \frac{1}{(\ln 3)^2}$

⑦ $I_q = \hat{\theta}_{MV} \pm k_q \left(I_n^{oss} \right)^{-1/2} =$

$$= \frac{\sum \ln(1+x_i)}{n} \pm k_q \left(\frac{n^3}{(\sum \ln(1+x_i))^2} \right)^{-1/2}$$

con $k_q = \sqrt{-2\ln q}$

⑧ $E[\hat{\theta}_{MV}(X_1)] = E\left[\frac{\sum \ln(1+X_i)}{n}\right] = \frac{n}{n} E[\ln(1+X_i)] \underset{(*)}{=} \theta \Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MV}$ non distorto di θ $\forall\theta$

(*) $\ln(1+X_i) \sim Exp(\theta) \Rightarrow E[\ln(1+X_i)] = \theta$

⑨ $MSE(\hat{\theta}_{MV}) = V(\hat{\theta}_{MV}) + B^2(\hat{\theta}_{MV}) \underset{\uparrow}{=} V(\hat{\theta}_{MV})$

in questo caso

$V(\hat{\theta}_{MV}) = V\left[\frac{\sum \ln(1+X_i)}{n}\right] = \frac{n}{n^2} V(\ln(1+X_i)) \underset{\checkmark}{=} \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

var. di $Exp(\theta)$ è θ^2

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV}$ è consistente di θ, $\forall\theta$

⑩ $\hat{\Psi}_{MV} = \frac{n}{\sum \ln(1+X_i)}$

$Y = \ln(1+X_i) \sim Exp(\theta) \Rightarrow S = \sum Y_i = \sum \ln(1+X_i) \sim Ga^S(n,\theta) \equiv Ga^R(n, 1/\theta)$

$\Rightarrow E(\hat{\Psi}_{MV}) = n\, E\left[\frac{1}{S}\right] = n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} f_S\, ds = n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \cdot \frac{(\frac{1}{\theta})^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\frac{s}{\theta}} ds =$

$= n \frac{(\frac{1}{\theta})^n}{\Gamma(n)} \int_{\mathbb{R}} s^{(n-1)-1} e^{-\frac{s}{\theta}} ds = n \frac{(\frac{1}{\theta})^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{(1/\theta)^{n-1}} \cdot \boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{(\frac{1}{\theta})^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \cdot s^{(n-1)-1} e^{-\frac{s}{\theta}} ds} =$

$\hookrightarrow$ INT. SU $\mathbb{R}$ di densità $Ga^R(n-1, \frac{1}{\theta}) = 1$

$= \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \frac{1}{\theta} \Rightarrow$ DISTORTO DI $\Psi = \frac{1}{\theta}$, $\forall\Psi$