Inferenza statistica – Esonero 1, Parte A2 – 15 aprile 2023

Cognome, nome e n. di matricola: SOLUZIONI

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità $f_X(x) = 3x^2 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Determinare l'espressione della funzione di densità $g_s(\cdot;\theta)$ della corrispondente famiglia con parametro di scala $\theta > 0$.

   Risp. $g_s(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \, 3\frac{x^2}{\theta^2} \, \mathbb{I}_{[0,1]}(x/\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3} \, \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x)$, $\theta>0$

2. Con riferimento al precedente esercizio, determinare il valore atteso della v.a. X e della v.a. Y con funzione di densità $g_s(y;\theta)$.

   Risp. $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \frac{3}{\theta^3} x^3 \, dx = \frac{3}{\theta^3} \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

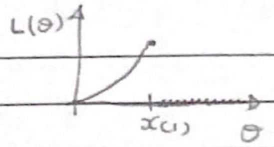
   $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X\theta) = \frac{3}{4}\theta = \frac{3}{4}\theta$

3. Sia X una v.a. con funzione di massa di probabilità $f_X(x;\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}$, $x = -1, 0, 1$, $\theta \in [0,1]$. Calcolare $\mathbb{P}_\theta(X < 1)$ e stabilire per quali valori di θ tale probabilità risulta inferiore a $1/4$.

   Risp. $\mathbb{P}(X<1) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1 - \frac{\theta}{2}$ $\quad 1 - \frac{\theta}{2} < \frac{1}{4} \iff \boxed{\theta > \frac{3}{2}}$

4. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale da popolazione con funzione di densità $f_X(x;\theta) = \frac{2\theta^2}{x^3} \cdot \mathbb{I}_{[\theta,\infty]}(x)$, $\theta > 0$. Determinare l'espressione e il grafico della funzione di verosimiglianza e della stima di massima verosimiglianza di θ.

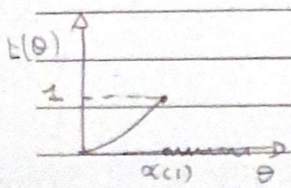
   Risp. $L(\theta) = \theta^{2n} \, \mathbb{I}_{[0,x_{(1)}]}(\theta)$

   $\hat{\theta}_{MV} = x_{(1)}$

5. Con riferimento al precedente esercizio, determinare la funzione di verosimiglianza relativa di θ e disegnarne il grafico.

   Risp. $\bar{L}(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{MV})} = \frac{\theta^{2n}}{x_{(1)}^{2n}} \frac{\mathbb{I}_{[0,x_{(1)}]}(\theta)}{\mathbb{I}_{[0,x_{(1)}]}(x_{(1)})} = \left[\frac{\theta}{x_{(1)}}\right]^{2n} \mathbb{I}_{[0,x_{(1)}]}(\theta)$

$\mathbb{V}(X_1 - \sqrt{3}X_2) = \mathbb{V}(X_1) + 3\mathbb{V}(X_2)$
$= 4$

6. Siano X_1 e X_2 due v.a. con distribuzione $N(0,1)$ indipendenti tra loro. Determinare le distribuzioni delle v.a. $U = (X_1 - \sqrt{3}X_2)$, $Z = \frac{U}{2}$ e $Z^2 = \frac{U^2}{4}$.

Risp. $U = X_1 - \sqrt{3}X_2 \sim N(0,4) \Rightarrow Z = \frac{U-0}{2} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1$

7. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale da $N(0, \sigma^2)$. Determinare valore atteso e varianza della statistica $H_n = aS_n^2 - b\overline{X}_n^2$, dove S_n^2 e $\overline{X}_n$ sono le statistiche varianza campionaria corretta e media campionaria e a, b due numeri reali noti [giustificare i passaggi principali].

Risp.
- $\mathbb{E}(H_n) = a\,\mathbb{E}(S_n^2) - b\,\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = a\sigma^2 - b[\mathbb{V}(\bar{X}_n) + \mathbb{E}(\bar{X}_n)^2)$
$= a\sigma^2 - b\sigma^2/n$
- $\mathbb{V}(H_n) = a^2\mathbb{V}(S_n^2) + b^2\mathbb{V}(\bar{X}_n^2)$ (l'indip $S_n^2 \perp \bar{X}_n$)
$= a^2\, 2\sigma^4/(n-1) + b^2\, 2\sigma^4/n^2$

in quanto $\bar{X}_n \sim N(0, \sigma^2/n) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}_n \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2}\bar{X}_n^2 \sim \chi^2_1$

8. Sia $X_1, \ldots, X_n$, $n > 1$, un campione casuale dalla popolazione $N(\mu_0, \sigma^2)$, μ_0 noto. Calcolare varianza e distorsione dello stimatore $\overline{S}_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2/2n$ di σ^2 e stabilire se è uno stimatore consistente.

Risp.
$\mathbb{E}(\bar{S}_n^2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}S_0^2\right) = \sigma^2/2 \Rightarrow$ DIST per σ^2 $\forall n$ e non va a zero per $n \to \infty$

$\mathbb{V}(\bar{S}_n^2) = \frac{1}{4}\mathbb{V}(S_0^2) = \frac{1}{4}\frac{2\sigma^4}{n} = \frac{\sigma^4}{2n}$

$\Downarrow$

$\bar{S}_n^2$ NON CONS

9. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale da una popolazione con funzione di densità $f_X(x;\theta) = 2\theta^2 x \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{\theta}]}(x)$, $\theta > 0$. Determinare $\mathbb{E}_\theta[X]$ e lo stimatore dei momenti di θ.

Risp.
$\mathbb{E}(X) = \int_0^{1/\theta} 2\theta^2 x^2\,dx = 2\theta^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/\theta} = \frac{2}{3\theta}$

$\frac{2}{3\theta} = \bar{X}_n \Rightarrow \hat{\theta}_M = \frac{2}{3\bar{X}_n}$

10. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale dalla popolazione Gamma(θ, θ), $\theta > 0$. Determinare uno stimatore dei momenti per θ.

Risp. Se $Ga^R(\theta,\theta) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 1 \Rightarrow$ devo usare $\bar{\mu}_2(\theta) = \hat{\sigma}_n^2$
mo. $\frac{\theta}{\theta^2} = \hat{\sigma}_n^2 \Rightarrow \hat{\theta}_M = 1/\hat{\sigma}_n^2$

Se $Ga^S(\theta,\theta)$
$L_D \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \theta^2 \Rightarrow \hat{\theta}_M = \boxed{\sqrt{\bar{X}_n}}$