Inferenza statistica – Esonero 1, Parte A1 – 15 aprile 2023

Cognome, nome e n. di matricola: SOLUZIONI

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia X una v.a. con funzione di massa di probabilità $f_X(x;\theta) = (\frac{\theta}{2})^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}$, $x=-1,0,1$, $\theta \in [0,1]$. Calcolare $\mathbb{P}_\theta(X \geq 0)$ e stabilire per quali valori di θ tale probabilità risulta superiore a 1/4.

   Risp. $\mathbb{P}_\theta(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}_\theta(X=-1) = 1 - \frac{\theta}{2} \geq 1/4 \qquad \theta < 3/2$

2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità $f_X(x) = 2x \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Determinare l'espressione della funzione di densità $g_s(\cdot;\theta)$ della corrispondente famiglia con parametro di scala $\theta > 0$.

   Risp. $g_s(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\,\frac{2x}{\theta}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x/\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\,\mathbb{I}_{[0,\theta]}(x)$

3. Con riferimento al precedente esercizio, determinare il valore atteso della v.a. X e della v.a. Y con funzione di densità $g_s(y;\theta)$.

   Risp. $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

   $Y = \theta X \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3}\theta$

   oppure

   $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\theta x \cdot \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \ldots$

4. Siano X_1 e X_2 due v.a. con distribuzione $\mathrm{N}(0,1)$ indipendenti tra loro. Determinare le distribuzioni delle v.a. $U = (X_1 - X_2)$, $Z = \frac{U}{\sqrt{2}}$ e $Z^2 = \frac{U^2}{2}$.

   Risp. $\mathbb{E}(U) = 0 - 0 = 0 \qquad \mathbb{V}(U) = 1 + 1 = 2$ ↳ (per indip di X_1 e X_2)

   $\Rightarrow U \sim \mathrm{N}(0,2) \Rightarrow Z = \frac{U-0}{\sqrt{2}} \sim \mathrm{N}(0,1)$

   comb lin di X_1 X_1 normali indip

   $\Rightarrow Z^2 = \frac{U^2}{2} \sim \chi^2_1$ (quadrato di $\mathrm{N}(0,1)$)

5. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale da $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Determinare valore atteso e varianza della statistica $H_n = aS_n^2 + b\overline{X}_n^2$, dove S_n^2 e $\overline{X}_n$ sono le statistiche varianza campionaria corretta e media campionaria e a, b due numeri reali noti [giustificare i passaggi principali].

   Risp. $\mathbb{E}[H_n] = a\,\mathbb{E}[S^2_n] + b\,\mathbb{E}(\overline{X}^2_n) = a\sigma^2 + b\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu_0^2\right]$, $\mu_0^2 \to 0$, $= (a + \frac{b}{n})\sigma^2$

   $\mathbb{V}(aS^2_n + b\overline{X}^2_n) = a^2\,\mathbb{V}(S^2_n) + b^2\,\mathbb{V}(\overline{X}^2_n)$

   ↳ (per indip di S^2_n e $\overline{X}_n$)

   con

   - $\mathbb{V}(S^2_n) = 2\sigma^4/(n-1)$ in quanto $(n-1)S^2_n/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$
   - $\mathbb{V}(\overline{X}^2_n) = 2\sigma^4/n^2$ in quanto $\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2}\overline{X}^2_n \sim \chi^2_1$

6. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale da una popolazione con funzione di densità $f_X(x;\theta) = 2\theta^2 x \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{\theta}]}(x)$, $\theta > 0$. Determinare $\mathbb{E}_\theta[X]$ e lo stimatore dei momenti di θ.

Risp.

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^{1/\theta} 2\theta^2 x^2 \, d\theta = 2\theta^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1/\theta} = \frac{2}{3\theta}$$

$$\frac{2}{3\theta} = \overline{X}_n \iff \theta = \frac{2}{3\overline{X}_n}$$

7. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale dalla popolazione $N(\mu_0, \sigma^2)$, μ_0 noto. Calcolare varianza e distorsione dello stimatore $\overline{S}_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2/(n+1)$ di σ^2 e stabilire se è uno stimatore consistente.

Risp.

$$\overline{S}^2_n = \frac{n+1}{n} S^2_0 = \frac{n+1}{n} \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$\overline{S}^2_n$

$$\mathbb{E}[\overline{S}_n^2] = \frac{n}{n+1}\theta \implies \text{DIST. per } \theta$$

$$\mathbb{V}[\overline{S}^2_n] = \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{2\sigma^4 n}{(n+1)^2} \quad 0$$

8. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale dalla popolazione uniforme nell'intervallo $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. Determinare uno stimatore dei momenti per θ.

Risp. $\mathbb{E}(x) = \frac{\theta - \theta}{2} = 0 \implies$ uso $\overline{\mu}_2(\theta) = \overline{m}_2(X_n)$ / $\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X}_n)^2 = \hat{\sigma}^2_n$

$\implies \mathbb{V}(X) = \hat{\sigma}^2_n$

$$\implies \frac{(2\theta)^2}{12} = \hat{\sigma}^2_n \implies \theta^2 = 3\hat{\sigma}^2_n$$

$$\implies \theta_M = \sqrt{3} \cdot \hat{\sigma}_n \quad \text{con } \hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{\sigma}^2_n}$$

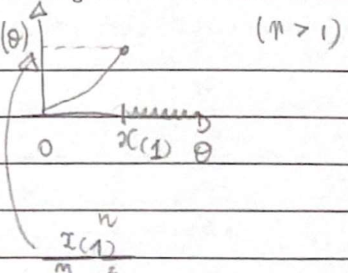
9. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale da popolazione con funzione di densità $f_X(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2} \cdot \mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Determinare l'espressione e il grafico della funzione di verosimiglianza e della stima di massima verosimiglianza di θ.

Risp.

$$L(\theta) = \frac{\theta^n}{\prod x_i^2} \, \mathbb{I}_{[0, x_{(1)}]}(\theta)$$

$$\hat{\theta}_{MV} = x_{(1)}$$

$(n \geq 1)$



10. Con riferimento al precedente esercizio, determinare la funzione di verosimiglianza relativa di θ e disegnarne il grafico.

Risp.

$$\overline{L}(\theta) = \left[\frac{\theta}{x_{(1)}}\right]^n \mathbb{I}_{[0, x_{(1)}]}(\theta)$$