

Cognome, nome e n. di matricola: _____

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

A – Problema. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} (1 - e^{-\frac{x}{\theta}}), \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

Per tale densità è possibile dimostrare che vale la seguente

$$\mathbb{E}[X^k] = \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) \theta^k k! \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

1. Verificare che $f_X(x; \theta)$ è una densità di probabilità;

Risp. _____

2. Determinare lo stimatore dei momenti di θ , indicato con $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ e stabilire se $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ è non distorto (per θ).

Risp. _____

3. Determinare $\mathbb{V}[X]$.

Risp. _____

4. Determinare l'errore quadratico medio di $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ e stabilire se è uno stimatore consistente di θ .

Risp. _____

5. Fornire la distribuzione asintotica di $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$

Risp. _____

6. Verificare che, per il modello in esame, il parametro θ rappresenta il parametro di scala.

Risp. _____

7. (★) Si dimostri che vale l'uguaglianza:

$$\mathbb{E}[X^k] = \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) \theta^k \Gamma(k+1) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

Risp. _____

Cognome, nome e n. di matricola: _____

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

B – Problema.

Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

Per tale densità è possibile dimostrare che vale la seguente

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \theta^{2\alpha} \Gamma(2\alpha + 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Si ricorda la proprietà della funzione speciale $\Gamma(\cdot)$ calcolata in corrispondenza di argomento intero positivo ovvero che $\Gamma(n) = (n-1)!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

1. Determinare il modello statistico per l' n -pla campionaria $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$.

Risp.

2. Scrivere l'espressione di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$, funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$; individuare nucleo di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$ e statistica sufficiente per il modello.

Risp.

3. Determinare $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza del parametro del modello.

Risp.

4. Determinare l'informazione osservata di Fisher e l'espressione dell'insieme approssimato di verosimiglianza di livello q (basato su approssimazione normale di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$).

Risp.

5. Mostrare che lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$ è UMVUE

Risp.

6. (★) Verificare che lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro $\psi = \theta^2$ è distorto per ψ e che la sua distorsione vale $\frac{\theta^2}{n}$.

Risp. _____

7. (★) Individuare lo stimatore UMVUE di θ^2 .

Risp. _____



