

Cognome, nome e n. di matricola: _____

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

A – Quesiti [dove necessario giustificare adeguatamente le risposte]

1. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$. Determinare l'espressione della funzione di densità della corrispondente famiglia con parametro di scala θ .

Risp. _____

2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Dire di quale modello si tratta e individuare il parametro di scala.

Risp. _____

3. Sia X una v.a. assolutamente continua con funzione di densità $f_X(x; \theta) = 2 \theta x e^{-\theta x^2}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. Verificare se $\{f_X(\cdot; \theta), \theta \in \Theta\}$ costituisce una famiglia esponenziale e determinare l'espressione della statistica sufficiente minimale associata a un campione casuale di dimensione n .

Risp. _____

4. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (i.i.d.) da una popolazione $N(0, 1)$. Determinare la distribuzione di probabilità di $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ e calcolare valore atteso e varianza della variabile aleatoria $V = 2Y - 3$.

Risp. _____

5. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale da $N(\mu, \sigma^2)$. Costruire con \mathbf{X}_n una v.a. T di Student con $n - 1$ gradi di libertà.

Risp. _____

6. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale da una popolazione uniforme nell'intervallo $[-\theta, 3\theta]$. Determinare lo stimatore dei momenti e la sua distribuzione asintotica.

Risp. _____

7. Fornire la definizione di stimatore UMVUE del parametro di un modello.

Risp. _____

8. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale da una popolazione $N(\mu_0, \theta)$, μ_0 noto. Dire qual è lo stimatore UMVUE di θ e fornirne l'espressione dell'errore quadratico medio (MSE).

9. L'errore quadratico medio di uno stimatore $d(\mathbf{X}_n)$ di θ è funzione di:

\mathbf{X}_n θ (\mathbf{X}_n, θ) n statistica sufficiente

[NB: più di una risposta può essere corretta]

10. La partizione indotta da una statistica sufficiente di un modello coincide sempre con quella indotta dalla funzione di verosimiglianza.

Vero Falso

Cognome, nome e n. di matricola: _____

[SI CORREGGE SOLO QUANTO RIPORTATO IN QUESTI FOGLI]

B – Problema. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

È noto che $\mathbb{E}[X] = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e $\mathbb{V}[X] = \frac{4-\pi}{2}\theta^2$.

1. Determinare il modello statistico per l' n -pla campionaria $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$.

Risp. _____

2. Scrivere l'espressione di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$, funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$; individuare nucleo di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$ e statistica sufficiente per il modello.

Risp. _____

3. Determinare $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza del parametro del modello.

Risp. _____

4. Determinare l'informazione osservata di Fisher e l'espressione dell'insieme di verosimiglianza di livello q (basato su approssimazione normale di $L(\theta; \mathbf{x}_n)$).

Risp. _____

5. Determinare $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$, stimatore dei momenti di θ e stabilire se è non distorto (per θ).

Risp. _____

6. (a) Determinare l'errore quadratico medio di $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ e stabilire se è uno stimatore consistente di θ . (b) Fornire la distribuzione asintotica di $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$

Risp. (a) _____

Risp. (b) _____

7. Verificare se $\hat{\theta}_M(\mathbf{X}_n)$ è o meno lo stimatore UMVUE di θ .

Risp. _____

8. Verificare che, per il modello in esame, il parametro θ rappresenta il parametro di scala.

Risp. _____

9. Determinare $\tau(\theta) = \mathbb{E}[X_i^2]$.

Risp. _____

10. Sfruttando il risultato del Punto 9, determinare lo stimatore UMVUE di $\tau(\theta)$. [Argomentare la risposta].

Risp. _____

