Corsi di Inferenza Statistica – Primo Esonero. 13 Aprile 2013

Tutti i Canali.

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI

♣

soluzioni aggiornate al 21.04.2013

Cognome e Nome: ______________________ **Canale:** __________

Esercizio 1. Si consideri un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ proveniente da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{\theta^2}\right\}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

1. Verificare se $\{f_X(\cdot; \theta), \theta > 0\}$ costituisce una famiglia esponenziale.
2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato e una statistica sufficiente unidimensionale per il modello.
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ e l'informazione osservata di Fisher. Calcolarne i valori nel caso di un campione casuale in cui $n = 30$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 120$.
4. Determinare l'approssimazione normale della funzione di verosimiglianza e l'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.147$ approssimato nel caso di un campione considerato nel punto precedente.

Soluzione.

1. Per verificare la proprietà richiesta è sufficiente mostrare che la densità può essere riscritta nella seguente forma

$$f_X(x; \theta) = h(x) exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\}$$

per un'opportuna scelta di funzioni $h(x)$ e $T(x)$ che non dipendono da θ e funzioni $\eta(\theta)$ e $B(\theta)$ che non dipendono da x. Nel nostro caso riscrivendo

$$f_X(x; \theta) = 2x \ \exp\left\{\log\frac{1}{\theta^2}\right\} \exp\left\{-\frac{x^2}{\theta^2}\right\} = 2x \ \exp\left\{-x^2\frac{1}{\theta^2} - 2\log\theta\right\}$$

e ponendo

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x \\ T(x) &= x^2 \\ \eta(\theta) &= -\frac{1}{\theta^2} \\ B(\theta) &= 2\log\theta \end{aligned}$$

si verifica che $\{f_X(\cdot; \theta), \theta > 0\}$ costituisce una famiglia esponenziale.

2. La funzione di verosimiglianza associata a un campione osservato $x_{oss} = (x_1, ..., x_n)$ è

$$\begin{aligned} L_{x_{oss}}(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta^2} \right\} \\ &= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta^2} \right\} \\ &\propto \frac{1}{\theta^{2n}} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta^2} \right\} \end{aligned}$$

e, per ottenere una statistica sufficiente *unidimensionale* (ovvero che assume valori in un sottoinsieme di numeri reali), ci si può avvalere delle ben note proprietà delle famiglie esponenziali per le quali è noto che la statistica

$$S(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

è una statistica sufficiente (ed anche minimale) per il parametro θ del modello.

3. Per ottenere la stima di massima verosimiglianza del parametro θ consideriamo la funzione di logverosimiglianza

$$\ell_{x_{oss}}(\theta) = n \log 2 + \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n \log \theta - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

derivando la quale si ha

$$\frac{d}{d\theta} \ell_{x_{oss}}(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2 \cdot \frac{n\theta^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^3}$$

e quindi si ottiene l'equazione di verosimiglianza

$$n\theta^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

che è risolta prendendo la radice positiva

$$\widehat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

dato che $\widehat{\theta}_{MV} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_{x_{oss}}(\theta)$ ovvero la soluzione va ricercata nello spazio parametrico previsto dal modello e, per il modello statistico considerato, deve essere $\theta > 0$ ovvero lo spazio parametrico è $\Theta = \Re^+ = (0, \infty)$. Per assicurarsi che la soluzione dell'equazione (punto stazionario) $\widehat{\theta}$ corrisponda ad un punto di massimo assoluto si osserva che per valori di θ più piccoli di $\widehat{\theta}$ la derivata prima della logverosimiglianza assume valori positivi mentre per valori di θ più grandi di

$\widehat{\theta}$ la derivata prima assume valori negativi. Per il calcolo dell'informazione di Fisher osservata si avrà

$$
\begin{aligned}
I_{x_{oss}} &= -\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\ell_{x_{oss}}(\theta)\right|_{\theta=\widehat{\theta}} \\
&= -\left.\left(2\,\frac{n}{\theta^2} - 6\,\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^4}\right)\right|_{\theta=\widehat{\theta}} \\
&= -\left(2\,\frac{n}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2} - 6\,\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^4}\right) \\
&= -\left(2\,\frac{n}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2} - 6\,\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}\right) \\
&= -\left(2\,\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - 6\,\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}
$$

Quindi in corrispondenza di un campione di $n = 30$ unità con valori campionari osservati tali che $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 120$ si avrà

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta} &= \sqrt{\frac{120}{30}} = 2 \\
I_{x_{oss}} &= \frac{4 \cdot 30^2}{120} = 30
\end{aligned}
$$

4. Per l'approssimazione normale della VEROSIMIGLIANZA RELATIVA potremo scrivere che

$$\overline{L}_{x_{oss}}(\theta) \approx \exp\left\{-\frac{I_{x_{oss}}}{2}\left(\theta - \widehat{\theta}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{30}{2}\left(\theta-2\right)^2\right\} = \exp\left\{-15\left(\theta-2\right)^2\right\}$$

ed infine l'intervallo di verosimiglianza approssimato di livello $q = 0.147$ sarà

$$\left[\widehat{\theta} - \sqrt{(-2\log q) I_{x_{oss}}^{-1}}, \widehat{\theta} + \sqrt{(-2\log q) I_{x_{oss}}^{-1}}\right]$$

e quindi

$$\left[2 - \sqrt{\tfrac{(-2\log 0.147)}{30}}, 2 + \sqrt{\tfrac{(-2\log 0.147)}{30}}\right]$$

$$[2 - \sqrt{0.1278}, 2 + \sqrt{0.1278}]$$

$$[2 - 0.3575, 2 + 0.3575]$$

$$[1.6425, 2.3575]$$

Esercizio 2. Si consideri un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ proveniente da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{2\theta^2}{x^3} I_{[\theta,+\infty]}(x), \qquad \theta > 0.$$

1. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato e una statistica sufficiente unidimensionale per il modello. Verificare se si tratta di statistica sufficiente minimale.

2. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ.

3. Determinare la funzione di verosimiglianza relativa e l'insieme di verosimiglianza di livello q.

4. Determinare il valore della stima di massima verosimiglianza di θ e gli estremi dell'insieme di verosimiglianza nel caso in cui $q = 0.147$ e $\mathbf{x} = (2, 1, 3, 4, 1.3)$.

Soluzione.

1. Per ottenere la funzione di verosimiglianza in questo modello *non regolare* in cui il supporto della distribuzione dipende dal parametro θ e in cui si deve avere $\theta > 0$ sarà utile riscrivere la funzione indicatrice $I_{[\theta,+\infty]}(x)$ che compare nella densità della singola osservazione come funzione di θ osservando che

$$I_{[\theta,+\infty]}(x) = 1 \text{ e } \theta > 0 \iff x \geq \theta > 0 \iff I_{(0,x]}(\theta) = 1$$

da cui si potrà derivare

$$\begin{aligned}
L_{x_{oss}}(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2\theta^2}{x_i^3} I_{[\theta,+\infty]}(x_i) \\
&= \frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,x_i]}(\theta) \\
&= \frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} I_{\cap_{i=1}^n (0,x_i]}(\theta) \\
&= \frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} I_{(0,x_{(1)}]}(\theta) \\
&\propto \theta^{2n} I_{(0,x_{(1)}]}(\theta)
\end{aligned}$$

Per ottenere una statistica sufficiente unidimensionale sarà utile applicare il criterio di fattorizzazione di Neyman. Considerando $h(x_1, ..., x_n) = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3}$, $S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)}$ e $g(s,\theta) = \theta^{2n} I_{(0,s]}(\theta)$ si può riscrivere

$$L_{x_{oss}}(\theta) = \frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} I_{(0,x_{(1)}]}(\theta) = h(x_1, ..., x_n) g(S(x_1, ..., x_n), \theta)$$

e quindi la statistica

$$S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)} \qquad \text{(minimo campionario)}$$

è una statistica sufficiente per θ. Per verificare che si tratta di una statistica sufficiente *minimale* per θ applichiamo il criterio (Scheffé) per cui una statistica è sufficiente e minimale per θ se, date due generiche n-uple campionarie $x_{oss} = (x_1, .., x_n)$ e $y_{oss} = (y_1, ..., y_n)$, si ha che le corrispondenti verosimiglianze $L_{x_{oss}}(\theta)$ e $L_{y_{oss}}(\theta)$ sono proporzionali

$$L_{x_{oss}}(\theta) = k(x_{oss}, y_{oss}) L_{y_{oss}}(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

a meno di un fattore costante $k(x_{oss}, y_{oss})$ che non dipende da θ <u>se e soltanto se</u> $S(x_1, ..., x_n) = S(y_1, ..., y_n)$. Infatti la FUNZIONE di θ, $\frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3}$ è proporzionale $\frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n y_i^3}$ a meno del fattore $k(x_{oss}, y_{oss}) = \frac{\prod_{i=1}^n y_i^3}{\prod_{i=1}^n x_i^3}$ mentre le funzioni indicatrici di θ $I_{(0, x_{(1)}]}(\theta)$ e $I_{(0, x_{(1)}]}(\theta)$ possono essere proporzionali tra loro come funzioni di θ <u>*se e solo se*</u> indicano lo stesso insieme di valori e quindi solo se $S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)} = y_{(1)} = S(y_1, ..., y_n)$.

2. Avendo riscritto la funzione di verosimiglianza come proporzionale alla funzione

$$\theta^{2n} I_{(0, x_{(1)}]}(\theta)$$

essendo θ^{2n} una funzione sempre crescente nell'intervallo $(0, x_{(1)}]$ si ottiene immediatamente che il massimo assoluto della funzione di verosimiglianza si raggiunge in corrispondenza dell'estremo inferiore dell'intervallo in cui la funzione di verosimiglianza risultat non nulla ovvero

$$\widehat{\theta}_{MV} = x_{(1)}$$

3. La funzione di verosimiglianza relativa sarà

$$\begin{aligned} \overline{L}_{x_{oss}}(\theta) &= \frac{L_{x_{oss}}(\theta)}{L_{x_{oss}}(\widehat{\theta}_{MV})} \\ &= \frac{\frac{2^n \theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} I_{(0, x_{(1)}]}(\theta)}{\frac{2^n x_{(1)}^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} I_{(0, x_{(1)}]}(x_{(1)})} \qquad \left(\text{N.B.} I_{(0, x_{(1)}]}(x_{(1)}) = 1 \right) \\ &= \left(\frac{\theta}{x_{(1)}} \right)^{2n} I_{(0, x_{(1)}]}(\theta) \end{aligned}$$

e quindi l'intervallo di verosimiglianza a livello q

$$I_{V(q)} = \left\{ \theta \in \Theta : \overline{L}_{x_{oss}}(\theta) \geq q \right\}$$

si ottiene attraverso lo studio della funzione di verosimiglianza relativa e corrisponderà ad un intervallo di estremi

$$[\theta_q, x_{(1)}]$$

dove θ_q è l'unica radice dell'equazione

$$\left(\frac{\theta}{x_{(1)}} \right)^{2n} = q$$

Con semplici passaggi si ottiene

$$\theta_q = x_{(1)} q^{\frac{1}{2n}}$$

4. Dagli $n = 5$ valori osservati per $q = 0.147$ si ha $x_{(1)} = 1$, $\theta_q = 1 \cdot q^{\frac{1}{10}} = 0.147^{\frac{1}{10}} = 0.8255$ e quindi

$$I_{V(0.147)} = [0.8255, 1]$$

Esercizio 3. Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale in cui $X_i \sim Poisson(\theta)$. Si considerino gli stimatori varianza campionaria $T_1(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$ e secondo momento campionario $T_2(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Studiare le proprietà di correttezza e correttezza asintotica dei due stimatori come stimatori del parametro θ.

2. Individuare opportuni valori costanti a e b tali che lo stimatore $T_U(X_1, ..., X_n) = aT_1(X_1, ..., X_n) + bT_2(X_1, ..., X_n)$ risulti uno stimatore corretto di $\psi = \theta^2$.

Soluzione.

1. La verifica delle proprietà di correttezza del primo stimatore $T_1 = T_1((X_1, ..., X_n)$ può essere effettuata ricordando che per una variabile casuale X_i con distribuzione di Poisson di parametro θ

$$Var[X_i] = \theta$$

e sfruttando le ben note proprietà della statistica campionaria $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ dalle quali si deduce che il valore atteso dello stimatore $T_1 = S^2$ vale

$$E[T_1(X_1, ..., X_n)] = E[S^2] = \frac{n-1}{n}Var[X_i] = \frac{n-1}{n}\theta \neq \theta \qquad \text{(diverso per almeno un } \theta \in \Theta)$$

e dunque lo stimatore T_1 risulta distorto, ma asintoticamente corretto dal momento che la distorsione

$$B_{T_1}(\theta) = E[T_1(X_1, ..., X_n)] - \theta = E[S^2] - \theta = \frac{n-1}{n}\theta - \theta = -\frac{\theta}{n}$$

tende ad annullarsi al limite

$$\lim_{n\to\infty} B_{T_1(X_1,...,X_n)}(\theta) = \lim_{n\to\infty} -\frac{\theta}{n} = 0 \qquad \forall \theta \in \Theta$$

La verifica delle proprietà di correttezza del secondo stimatore $T_2 = T_2(X_1, ..., X_n)$ può essere effettuata usando la linearità dell'operatore valore atteso dalla quale si evince che

$$E[T_2] = E[T_2(X_1, ..., X_n)] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] = \frac{n}{n}E[X_1^2] = E[X_1^2] \quad (1)$$

Ricordando quindi che, in generale,

$$Var[X_1] = E[X_1^2] - E[X_1]^2$$

e che, per una variabile casuale X_1 con distribuzione di Poisson di parametro θ,

$$Var[X_1] = E[X_1] = \theta$$

si ricava

$$E[X_1^2] = Var[X_i] + E[X_1]^2 = \theta + \theta^2 \qquad (2)$$

Quindi da (8) e (2) si ottiene che il valore atteso del primo stimatore

$$E[T_2] = E[T_2(X_1, ..., X_n)] = E[X_1^2] = \theta + \theta^2 \neq \theta \text{(diverso per almeno un } \theta \in \Theta) \qquad (3)$$

ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} E[T_2(X_1,...,X_n)] = \theta + \theta^2 \neq \theta \qquad \text{(diverso per almeno un } \theta \in \Theta) \tag{4}$$

da cui si deduce che il secondo stimatore non gode né della proprietà di correttezza né della proprietà di correttezza asintotica.
2. Per determinare le costanti a e b dobbiamo imporre che la seguente condizione valga per ogni $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= E\left[T_U(X_1,...,X_n)\right] = E\left[aT_1(X_1,...,X_n) + bT_2(X_1,...,X_n)\right] \\
&= aE\left[T_1(X_1,...,X_n)\right] + bE\left[T_2(X_1,...,X_n)\right] \\
&= a\,\frac{n-1}{n}\,\theta + b\,(\theta+\theta^2) \\
&= (a\,\frac{n-1}{n} + b)\theta + b\,\theta^2 \qquad \forall\theta\in\Theta
\end{aligned}$$

Affinché la condizione di ugualglianza a θ^2 valga per ogni $\theta \in \Theta$ il coefficiente tra parentesi che moltiplica θ dovrà annullarsi mentre il coefficiente b che moltiplica θ^2 dovrà essere uguale ad 1

$$\begin{cases} a\,\frac{n-1}{n} + b & = 0 \\ b & = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} a & = -b\frac{n}{n-1} = -\frac{n}{n-1} \\ b & = 1 \end{cases}$$

Corsi di Inferenza Statistica – Primo Esonero. 13 Aprile 2013

Tutti i Canali.

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI

◇

soluzioni aggiornate al 21.04.2013

Cognome e Nome: ______________________________ **Canale:** ____________

Esercizio 1. Si consideri un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ proveniente da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{\theta^{1/2}}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\frac{(x-1)^2}{x}\right\}, \qquad x>0, \quad \theta>0.$$

1. Verificare se $\{f_x(\cdot;\theta), \theta>0\}$ costituisce una famiglia esponenziale.
2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato e una statistica sufficiente unidimensionale per il modello.
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ e l'informazione osservata di Fisher. Calcolarne i valori nel caso di un campione casuale in cui $n=30$ e $\sum_{i=1}^n[(x_i-1)^2/x_i] = 5.8$.
4. Determinare l'approssimazione normale della funzione di verosimiglianza e l'insieme di verosimiglianza di livello $q=0.147$ approssimato nel caso di un campione considerato nel punto precedente.

Soluzione.

1. Per verificare la proprietà richiesta è sufficiente mostrare che la densità può essere riscritta nella seguente forma

$$f_X(x;\theta) = h(x)exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\}$$

per un'opportuna scelta di funzioni $h(x)$ e $T(x)$ che non dipendono da θ e funzioni $\eta(\theta)$ e $B(\theta)$ che non dipendono da x. Nel nostro caso, riscrivendo

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} \exp\left\{\log\theta^{1/2} - \frac{\theta}{2}\frac{(x-1)^2}{x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\frac{(x-1)^2}{x} - (-\frac{1}{2}\log\theta)\right\}$$

e quindi ponendo

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} \\ T(x) &= \frac{(x-1)^2}{x} \\ \eta(\theta) &= -\frac{\theta}{2} \\ B(\theta) &= -\frac{1}{2}\log\theta \end{aligned}$$

si verifica che $\{f_X(\cdot;\theta), \theta > 0\}$ costituisce una famiglia esponenziale.

2. La funzione di verosimiglianza associata a un campione osservato $x_{oss} = (x_1, ..., x_n)$ è

$$\begin{aligned} L_{x_{oss}}(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} x_i^{3/2}} \theta^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\theta}{2} \frac{(x_i-1)^2}{x_i} \right\} \right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-\frac{3}{2}} \theta^{\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i} \right\} \\ &\propto \theta^{\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i} \right\} \end{aligned}$$

e per ottenere una statistica sufficiente *unidimensionale* (ovvero che assume valori in un sottoinsieme di numeri reali) ci si può avvalere delle ben note proprietà delle famiglie esponenziali per le quali è noto che la statistica

$$S(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n T(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i}$$

è una statistica sufficiente (ed anche minimale) per il parametro θ del modello.

3. Per ottenere la stima di massima verosimiglianza consideriamo la funzione di logverosimiglianza

$$\ell_{x_{oss}}(\theta) = C + \frac{n}{2}\log\theta - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i}$$

($C = -\frac{n}{2}\log\pi - \frac{3}{2}\log\prod_{i=1}^n x_i$, costante rispetto a θ) derivando la quale si ha

$$\frac{d}{d\theta}\ell_{x_{oss}}(\theta) = \frac{n}{2\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i}$$

e quindi si ottiene l'equazione di verosimiglianza

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i} = 0$$

che è risolta con

$$\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{x_i}}$$

Per assicurarsi che la soluzione dell'equazione (punto stazionario) $\widehat{\theta}$ corrisponda ad un punto di massimo assoluto si osserva che per valori di θ più piccoli di $\widehat{\theta}$ la derivata prima della logverosimiglianza assume valori positivi mentre per valori di θ più grandi di $\widehat{\theta}$ la derivata prima assume valori negativi. Dunque $\widehat{\theta}$ è un punto di massimo assoluto per $\ell_{x_{oss}}(\theta)$ e quindi anche per $L_{x_{oss}}(\theta)$. Per il calcolo dell'informazione di Fisher osservata si può calcolare

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\ell_{x_{oss}}(\theta) = -\frac{n}{2\theta^2}$$

che risulta sempre negativa per ogni $\theta \in \Theta$.

Quindi in corrispondenza delle $n = 30$ osservazioni campionarie con $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-1)^2}{x_i} = 5.8$ si avrà

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta} &= \sqrt{\frac{30}{5.8}} = 5.1724 \\
I_{x_{oss}} &= -\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\ell_{x_{oss}}(\theta)\right|_{\theta=\widehat{\theta}} = \frac{30}{2 \cdot 5.1724^2} = 0.561
\end{aligned}$$

4. Per l'approssimazione normale della VEROSIMIGLIANZA RELATIVA potremo scrivere che

$$\overline{L}_{x_{oss}}(\theta) \approx \exp\left\{-\frac{I_{x_{oss}}}{2}\left(\theta - \widehat{\theta}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{0.561}{2}(\theta - 5.1724)^2\right\}$$

ed infine l'intervallo di verosimiglianza approssimato di livello $q = 0.147$ sarà

$$\left[\widehat{\theta} - \sqrt{(-2\log q)I_{x_{oss}}^{-1}}, \widehat{\theta} + \sqrt{(-2\log q)I_{x_{oss}}^{-1}}\right]$$

e quindi

$$\left[5.1724 - \sqrt{\frac{(-2\log 0.147)}{0.561}}, 5.1724 + \sqrt{\frac{(-2\log 0.147)}{0.561}}\right]$$

$$[5.1724 - \sqrt{6.8354}, 5.1724 + \sqrt{6.8354}]$$

$$[5.1724 - 2.61, 5.1724 + 2.61]$$

$$[2.5624, 7.7824]$$

Esercizio 2. Si consideri un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ proveniente da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{2}{x^3\theta^2} I_{[1/\theta,+\infty)}(x), \qquad \theta > 0.$$

1. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un campione osservato e una statistica sufficiente unidimensionale per il modello. Verificare se si tratta di statistica sufficiente minimale.
2. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ.
3. Determinare la funzione di verosimiglianza relativa e l'insieme di verosimiglianza di livello q.
4. Determinare il valore della stima di massima verosimiglianza di θ e gli estremi dell'insieme di verosimiglianza nel caso in cui $q = 0.147$ e $\mathbf{x} = (2, 1, 3, 4, 1.3)$.

Soluzione.

1. Per ottenere la funzione di verosimiglianza in questo modello *non regolare* in cui il supporto della distribuzione dipende dal parametro θ e in cui si deve avere $\theta > 0$ sarà utile riscrivere la funzione indicatrice $I_{[1/\theta,+\infty)}(x)$ che compare nella densità della singola osservazione come funzione di $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Osservando che

$$I_{[1/\theta,+\infty)}(x) = 1 \iff x \geq \frac{1}{\theta} \iff \frac{1}{x} \leq \theta \iff I_{[\frac{1}{x},\infty)}(\theta) = 1$$

si potrà derivare

$$\begin{aligned}
L_{x_{oss}}(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2}{x_i^3\theta^2} I_{[1/\theta,+\infty)}(x_i) \\
&= \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3} \theta^{-2n} \prod_{i=1}^n I_{[\frac{1}{x_i},\infty)}(\theta) \\
&= \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3} \theta^{2n} I_{\cap_{i=1}^n [\frac{1}{x_i},\infty)}(\theta) \\
&= \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3} \theta^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta) \\
&\propto \theta^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)
\end{aligned}$$

Faccciamo bene attenzione che l'intersezione degli intervalli illimitati a destra $[\frac{1}{x_i}, \infty)$ corrisponde all'intervallo il cui estremo inferiore corrisponde al massimo degli estremi inferiori ciascuno corrispondente al valore $\frac{1}{x_i}$. Tuttavia

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\min_{i=1,2,\ldots,n} x_i} = \frac{1}{x_{(1)}}$$

Per ottenere una statistica sufficiente unidimensionale sarà utile applicare il criterio di fattorizzazione di Neyman. Considerando $h(x_1, ..., x_n) = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3}$, $S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)}$ e $g(s, \theta) = \theta^{-2n} I_{[\frac{1}{s},\infty)}(\theta)$ si può riscrivere

$$L_{x_{oss}}(\theta) = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3} \theta^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta) = h(x_1, ..., x_n) g(S(x_1, ..., x_n), \theta)$$

e quindi la statistica

$$S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)} \qquad \text{(minimo campionario)}$$

è una statistica sufficiente per θ. Per verificare che si tratta di una statistica sufficiente *minimale* per θ applichiamo il criterio (Scheffé) per cui una statistica è sufficiente e minimale per θ se date due generiche n-uple campionarie $x_{oss} = (x_1, .., x_n)$ e $y_{oss} = (y_1, ..., y_n)$ si ha che le corrispondenti verosimiglianze $L_{x_{oss}}(\theta)$ e $L_{y_{oss}}(\theta)$ sono proporzionali

$$L_{x_{oss}}(\theta) = k(x_{oss}, y_{oss}) L_{y_{oss}}(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

a meno di un fattore costante $k(x_{oss}, y_{oss})$ che non dipende da θ se e soltanto se $S(x_1, ..., x_n) = S(y_1, ..., y_n)$. Infatti la FUNZIONE di θ, $\frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3}\theta^{-2n}$ è proporzionale $\frac{2^n}{\prod_{i=1}^n y_i^3}\theta^{-2n}$ a meno del fattore $k(x_{oss}, y_{oss}) = \frac{\prod_{i=1}^n y_i^3}{\prod_{i=1}^n x_i^3}$ mentre le funzioni indicatrici di θ $I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)$ e $I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)$ possono essere proporzionali tra loro come funzioni di θ *se e solo se* indicano lo stesso insieme di valori e quindi solo se $S(x_1, ..., x_n) = x_{(1)} = y_{(1)} = S(y_1, ..., y_n)$.

2. Avendo riscritto la funzione di verosimiglianza come proporzionale alla funzione

$$\theta^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)$$

essendo θ^{-2n} una funzione sempre decrescente nell'intervallo $[\frac{1}{x_{(1)}}, \infty)$ si ottiene immediatamente che il massimo assoluto della funzione di verosimiglianza si raggiunge in

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{x_{(1)}}$$

3. La funzione di verosimiglianza relativa sarà

$$\begin{aligned}
\overline{L}_{x_{oss}}(\theta) &= \frac{L_{x_{oss}}(\theta)}{L_{x_{oss}}(\widehat{\theta}_{MV})} \\
&= \frac{\frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3}\theta^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)}{\frac{2^n}{\prod_{i=1}^n x_i^3}\frac{1}{x_{(1)}}^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\frac{1}{x_{(1)}})} \qquad \left(N.B.\ I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\frac{1}{x_{(1)}}) = 1\right) \\
&= \left(\theta x_{(1)}\right)^{-2n} I_{[\frac{1}{x_{(1)}},\infty)}(\theta)
\end{aligned}$$

e quindi l'intervallo di verosimiglianza a livello q

$$I_{V(q)} = \left\{\theta \in \Theta : \overline{L}_{x_{oss}}(\theta) \geq q\right\}$$

si otterrà dallo studio di una funzione non nulla e decrescente nell'intervallo $[\frac{1}{x_{(1)}}, \infty)$ corrisponderà ad un intervallo di estremi

$$\left[\frac{1}{x_{(1)}}, \theta_q\right]$$

dove θ_q è l'unica radice dell'equazione

$$\left(\theta x_{(1)}\right)^{-2n} = q$$

Con semplici passaggi si ottiene

$$\theta_q = \frac{q^{-\frac{1}{2n}}}{x_{(1)}}$$

4. Dagli $n = 5$ valori osservati per $q = 0.147$ si ha $x_{(1)} = 1$, $\theta_q = 1 \cdot q^{-\frac{1}{10}} = 0.147^{-\frac{1}{10}} = 1.2113$ e quindi

$$I_{V(0.147)} = [1, 1.2113]$$

Esercizio 3. Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale in cui $X_i \sim Poisson(\theta)$. Si considerino gli stimatori media campionaria $T_1(X_1, ..., X_n) = \overline{X}$ e secondo momento campionario $T_2(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Mostrare che solo il primo stimatore è uno stimatore corretto e consistente per il parametro θ.

2. Determinare i valori costanti c_1 e c_2 in corrispondenza dei quali lo stimatore

$$T_U(X_1, ..., X_n) = c_1 T_1(X_1, ..., X_n) + c_2 T_2(X_1, ..., X_n)$$

   risulta uno stimatore corretto di $\psi = \theta^2$.

Soluzione.

1. La verifica delle proprietà di correttezza del primo stimatore $T_1 = T_1(X_1, ..., X_n)$ può essere effettuata sfruttando le ben note proprietà della statistica media campionaria $\overline{X}$ e il fatto che per una $X_i \sim Poisson(\theta)$ il valore atteso esiste finito e vale $E[X_i] = \theta$. Da ciò si deduce che il valore atteso dello stimatore $T_1 = \overline{X}$ vale

$$E[T_1(X_1, ..., X_n)] = E[\overline{X}] = E[X_i] = \theta \qquad \forall\theta \in \Theta$$

e dunque lo stimatore T_1 risulta corretto per θ. Per il comportamento asintotico della media campionaria dalla legge forte dei grandi numeri sappiamo che la variabile casuale $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge quasi certamente alla media della distribuzione di X_i

$$Pr_\theta \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \theta \right\} = 1 \qquad \forall\theta \in \Theta$$

e quindi lo stimatore $T_1 = \overline{X}$ è consistente in senso forte. Inoltre, dal momento che la varianza della singola X_i esiste finita e vale θ si ha anche la consistenza in media quadratica visto che

$$\lim_{n\to\infty} EQM_{T_1}(\theta) = \lim_{n\to\infty} Var_{\overline{X}}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{Var[X_i]}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{n} = 0 \qquad \forall\theta \in \Theta$$

Per la verifica delle proprietà di correttezza del secondo stimatore $T_2 = T_2(X_1, ..., X_n)$ si può usare la linearità dell'operatore valore atteso da cui si evince che

$$E[T_2] = E[T_2(X_1, ..., X_n)] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] = \frac{n}{n}E[X_1^2] = E[X_1^2] \quad (5)$$

Ricordando quindi che, in generale,

$$Var[X_1] = E[X_1^2] - E[X_1]^2$$

e che, per una variabile casuale X_1 con distribuzione di Poisson di parametro θ,

$$Var[X_1] = E[X_1] = \theta$$

si ricava

$$E[X_1^2] = Var[X_i] + E[X_1]^2 = \theta + \theta^2 \qquad (6)$$

Quindi da (5) e (6) si ottiene che il valore atteso del secondo stimatore

$$E[T_2] = E[T_2(X_1, ..., X_n)] = E[X_1^2] = \theta + \theta^2 \neq \theta \qquad \text{(diverso per almeno un } \theta \in \Theta) \tag{7}$$

ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} E[T_2(X_1, ..., X_n)] = \theta + \theta^2 \neq \theta \qquad \text{(diverso per almeno un } \theta \in \Theta) \tag{8}$$

da cui si deduce che il secondo stimatore non gode né della proprietà di correttezza né della proprietà di correttezza asintotica.

2. Per determinare le costanti c_1 e c_2 dobbiamo imporre che la seguente condizione valga per ogni $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= E\left[T_U(X_1, ..., X_n)\right] = E\left[c_1 T_1(X_1, ..., X_n) + c_2 T_2(X_1, ..., X_n)\right] \\
&= c_1 E\left[T_1(X_1, ..., X_n)\right] + c_2 E\left[T_2(X_1, ..., X_n)\right] \\
&= c_1\theta + c_2(\theta + \theta^2) \\
&= (c_1 + c_2)\,\theta + c_2\,\theta^2 \qquad \forall \theta \in \Theta
\end{aligned}$$

da cui si evince che

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_2 & = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1 & = -c_2 = -1 \\ c_2 & = 1 \end{cases}$$