Laboratorio di inferenza statistica (2024-2025)

Lab. 5 – Analisi della verosimiglianza; distribuzione campionaria di uno stimatore – 27 marzo 2025

Esercizio 1 - (Funzione di verosimiglianza: modello normale, problema N3).
Si consideri $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$ iid, μ_0 noto e $\theta > 0$ incognito. Allora (vedi Esempio 3.27 e 3.30 libro)

$$L(\theta; \mathbf{x}_n) = \frac{1}{\theta^{n/2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta}\right\} \qquad \text{e} \qquad \tilde{L}(\theta; \mathbf{x}_n) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \widehat{\theta}_{mv})^2 I_n^{oss}\right\}$$

dove

$$\widehat{\theta}_{mv} = S_0^2 \qquad I_n^{oss} = \frac{n}{2\widehat{\theta}_{mv}^2} \qquad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

1. Scrivere le funzioni R `L.ex`, `L.rel` e `L.appr`.
2. Disegnare `L.rel` per il campione `dati`$= (2.5, 0.8, 2.7, 2.4, 4.1, 6.1, 1, 3, 2.9, -2)$ assumendo che $\mu_0 = 2$.
3. Sovrapporre al precedente il grafico di `L.appr`
4. Ripetere assumendo di avere osservato anche i seguenti dati in aggiunta ai precedenti: $(3, 5, 6, 1, 1)$
5. Scrivere la funzione `Lq.appr(x,mu,q)` per il calcolo dell'insieme di verosimiglianza di livello q (approssimazione normale) e determinare l'insieme per `dati`.

Esercizio 2 - (Funzione di verosimiglianza: modello uniforme).
Considerare il modello uniforme in $[0, \theta]$, $\theta > 0$ incognito.

1. Scrivere la funzione `L.fun(theta,x)` per la funzione di verosimiglianza associata a un campione di dimensione n.
2. Scrivere la funzione `L.fun.rel(theta,x)` e disegnarne il grafico per il campione osservato `dati`=(4.6, 1.0, 1.0, 0.9, 3.1, 1.7, 4.7, 0.6, 4.0, 1.3) nell'intervallo $[0, 10]$.
3. Tracciare la retta $y = q$ con $q = 0.147$ e trovare gli insiemi di verosimiglianza di livello q.
4. Calcolare la lunghezza dell'intervallo.
5. Sia `dati2` il campione che si ottiene aggiungendo a `dati` le seguenti osservazioni: (3.7,4.2,2.1,4.3,0.9). Aggiungere al grafico già ottenuto la fdv relativa che si ottiene per il nuovo campione.
6. Trovare il nuovo insieme di verosimiglianza e la sua lunghezza.
7. Trasformare in un funzioni `R`.

Esercizio 3 - (Distribuzione campionaria di uno stimatore: modello normale, problema N1).
Si consideri $X_i|\theta \sim \mathrm{N}\left(\theta, \sigma^2\right)$ iid, σ^2 noto e $\theta \in \mathbb{R}$ incognito. Porre $\sigma^2 = 1$. È noto che, per qualsiasi $\theta > 0$,

$$\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}) = \overline{X}_n|\theta \sim \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Ottenere il grafico della funzione di densità di $\overline{X}_n$ per $n = 1$ e poi per $n = 10, 50, 100, 1000$, supponendo che il vero valore di θ sia $\theta^\star = 3$.

Esercizio 4 - (Distribuzione campionaria di uno stimatore: modello normale, problema N3).
Si consideri $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$ iid, μ_0 noto e $\theta > 0$ incognito. Porre $\mu_0 = 2$. È noto che, per qualsiasi $\theta > 0$,

$$\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}) = S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 \sim \mathrm{Ga}^R\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2\theta}\right)$$

e quindi che, $\forall \theta > 0$

$$\mathbb{E}_\theta[S_0^2] = \theta, \qquad \mathbb{V}_\theta[S_0^2] = \frac{2\theta^2}{n}.$$

Ottenere il grafico della funzione di densità di S_0^2 per $n = 5, 10, 50, 100, 1000$ supponendo che, ad esempio, il vero valore del parametro θ sia $\theta^\star = 2$.