Laboratorio di inferenza statistica (2024-2025)

Lab. 4 – Funzione di verosimiglianza e approssimazione normale – 20 marzo 2025

1. **Modello N1: fdv**

   Scrivere la funzione `R` denominata `L.N1(theta,xn,sig2)` per ottenere il grafico della funzione di verosimiglianza relativa per il parametro θ del modello $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ associato a un campione casuale di dimensione n:

   $$\overline{L}(\theta) = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \overline{x}_n)^2\right\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

   Disegnare il grafico di $L(\theta)$ per il campione osservato `dati1`$=(-2, 3, 4, 2, 6)$.

   Ripetere con il campione `dati2` che si ottiene replicando tre volte le osservazioni di `dati1`.

2. **Modello N1: insieme Lq esatto con formule**

   Scrivere la funzione `Lq.N(xn,sig2,q)` che restituisca i valori degli estremi dell'insieme L_q e della sua lunghezza, ricordando che

   $$L_q(\mathbf{x}_n) = \left[\overline{x}_n - k_q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + k_q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \qquad k_q = \sqrt{-2\log(q)}.$$

   Determinare i valori numerici per l'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.8$ per i dati a disposizione.

3. **Modello N1: insieme Lq esatto con calcolo numerico**

   Calcolare numericamente gli estremi dell'insieme L_q e confrontare con i valori ottenuti con le formule dell'esercizio precedente, usando `dati1` e `dati2`.

4. **Modello bernoulliano: approssimazione normale della fdv**

   Scrivere la funzione `R` indicata con `L.bern.approx(theta,xn)` per ottenere la funzione di verosimiglianza relativa di θ per il modello bernoulliano associata a un campione casuale di dimensione n ricordando che

   $$\widetilde{L}(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2(I_n^{oss})^{-1/2}}(\theta - \widehat{\theta}_{mv})^2\right\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

   e sapendo che $I_n^{oss} = \frac{n}{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}$ e che $\widehat{\theta}_{mv} = \overline{x}_n$. Confrontare le funzioni $\overline{L}(\theta)$ e $\widetilde{L}(\theta)$ per i due campioni `dati1` e `dati2`. Ricordare che, posto $s_n = \sum x_i$, si ha

   $$\overline{L}(\theta) = \frac{\theta^{s_n}(1-\theta)^{n-s_n}}{(\widehat{\theta}_{mv})^{s_n}(1-\widehat{\theta}_{mv})^{n-s_n}}, \qquad \theta \in [0, 1].$$

   Per la funzione $\overline{L}(\theta)$ usare il codice

5. **Modello bernoulliano: confronto insiemi $\widetilde{L}_q$ e L_q**

   Scrivere la funzione `R` indicata con `Lq.bern.appr(xn,q)` per la determinazione degli estremi dell'insieme $\widetilde{L}_q$ di verosimiglianza di livello q ottenuti con approssimazione normale. Ottenere gli intervalli approssimati $\widetilde{L}_q$ con i campioni `dati1` e `dati2` e confrontare con gli intervalli esatti ottenuti con metodo numerico con la funzione `Lq.bern.num(xn,q)`, usando vari valori di q.