Laboratorio di decisioni statistiche - Prova finale 3 - 11 febbraio 2025

Nome, cognome e matricola: ____________________

1. Si consideri $X_i, \ldots, X_n|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d. e una distribuzione a priori Beta per Θ di parametri $\alpha = 5$, $\beta = 3$. Sia $\Lambda = \ln \frac{\theta}{1-\theta}$. Supporre inoltre che $n = 20$ e che la somma delle osservazioni sia pari a $s_n = 12$. Calcolare $\mathbb{E}\left[\Lambda|\mathbf{z}_n\right]$ e $\mathbb{V}\left[\Lambda|\mathbf{z}_n\right]$ con il metodo di MC.

   Risultato:

   Codice

2. Si consideri un campione osservato da modello Poisson con $n = 8$ e somma delle osservazioni pari a $s_n = 20$. Si consideri inoltre come distribuzione iniziale una densità Gamma $(4, 2)$ (parametrizzazione `rate`). Determinare l'intervallo a posteriori ET (equal-tails) di livello 0.90 per $\psi = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ (parametro di asimmetria).

   Risultato:

   Codice

3. Si consideri $\delta = 1.7$, $\omega \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ (con parametrizzazione `rate`) e $W_\delta(\omega) = |\delta - \omega|$. Calcolare con MC il valore del criterio della soglia critica, assumendo $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\lambda = 1.3$. [**Sugger.**: $K_{sc} = \mathbb{P}(W_\delta(\omega) > \lambda)$].

Risultato:

Codice

4. Sapendo che, per uno stimatore d del parametro θ si ha che $R(\theta, d) = c_n \theta^2$, con $c_n = \frac{2n-1}{n^2}$, calcolare con MC il valore del rischio di Bayes $r_\pi(d) = \mathbb{E}_\pi[R(\Theta, d)]$ assumendo $n = 12$ e, come distribuzione a priori per Θ, una densità Gamma$(3, \texttt{rate} = 4)$.

Risultato:

Codice

5. Supporre che $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$ con $\alpha = 5$ e $\beta = 4$. Calcolare con MC il valore di $\overline{\mu}_3(\theta) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^3)$.

Risultato:

Codice

6. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d uniformi nell'intervallo $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Calcolare con MC la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo $[X_{(n)}, X_{(n)} + b]$, assumendo $\theta = 4$, $b = 1.3$, $n = 10$.

Risultato:

Codice

7. $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(0,\theta)$, i.i.d. - Considerare il test delle ipotesi $H_0 : \theta = 3$ vs. $H_1 : \theta = 2$ assumendo, $n = 10$. Calcolare **con MC** la probabilità $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[\mathcal{Z}_1]$ di errore di primo tipo e la potenza $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[\mathcal{Z}_1]$ del test basato sulla regione di rifiuto $\mathcal{Z}_1 = \{\mathbf{z}_n : bS_n^2 < k = 2.2\}$, dove $b = \frac{n-1}{n+1}$ e S_n^2 indica la varianza campionaria corretta.

   α:

   $1 - \beta$:

   Codice

8. $X|\theta \sim \mathrm{Epx}(\theta)$ (parametrizzazione `scale`). Sia $\lambda_{01}(X)$ il rapporto delle verosimiglianze per un campione di dimensione $n = 1$ per il confronto tra $H_0 = 0.9$ vs $H_1 = 1.1$. Determinare l'espressione di $\lambda_{01}(X)$ e poi calcolare **con MC** il valore di $\mathbb{E}_\theta[\lambda_{01}(X)]$, supponendo che $\theta = 1$. [Sugg.: usare `rexp()` oppure `dgamma()` per generare i valori di X e `dexp()` oppure `dgamma()` per il calcolo di λ_{01}].

   $\mathbb{E}_\theta[\lambda_{01}(X)]$:

   Codice