Teoria statistica delle decisioni – a.a. 23-24 - **Parte 2** - 04-02-24 [**SI CORREGGONO SOLO QUESTI FOGLI**]

Cognome, nome e n. di matricola: ______________________________

Sia $\mathbf{Z}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ un campione *i.i.d.* da $f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \cdot e^{-x/(2\theta)}$, con $x \geq 0$ e $\theta > 0$ incognito. Si consideri, ove necessario, la perdita quadratica $\mathbb{L}(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

1. Determinare l'espressione dello stimatore di massima verosimiglianza d_{mv}.
2. Determinare $\mathbb{E}_\theta\big[d_{mv}\big]$, $\mathbb{V}_\theta\big[d_{mv}\big]$ e $R(\theta, d_{mv})$.
3. Determinare $K_{va}[R(\Theta, d_{mv})] = r_\pi(d_{mv})$, assumendo per Θ la distribuzione a priori coniugata Inverse-Gamma(α, β)[1].
4. Sia $\psi = \mathbb{P}_\theta[X > 2]$ una funzione di θ. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di ψ.
5. Verificare che la famiglia delle distribuzioni Inverse-Gamma(α, β) è coniugata al modello in esame, determinando l'espressione dei relativi iperparametri a posteriori.
6. (a) Detta $\pi_j(\theta)$ la distribuzione a priori di Jeffreys per il parametro θ, verificare che $\pi_j(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$.

   (b) Determinare la distribuzione a posteriori $\pi_j(\theta|\mathbf{z}_n)$ e stabilire per quali valori degli iperparametri α e β tale distribuzione coincide con la generica distribuzione a posteriori dell'analisi coniugata.
7. (a) Verificare che $S_n|\theta \sim$ Gamma$\big(n,\ \texttt{rate = } \frac{1}{2\theta}\big)$.

   (b) Determinare una quantità pivotale in funzione di S_n e il corrispondente intervallo di confidenza per θ di livello $1 - \alpha$.
8. Verificare che il modello in esame ha rapporto delle verosimiglianze monotono in $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, **motivando la risposta** attraverso la discussione dei segni nello studio della monotonia.
9. Si considerino le ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$. Con riferimento al test esatto (**non asintotico**) di Karlin-Rubin, determinare:

   (a) la regione di rifiuto del test di ampiezza α in termini di funzione di ripartizione della statistica sufficiente per il modello;

   (b) l'espressione della funzione di potenza del test di ampiezza α.
10. Per il modello in esame, si consideri la funzione di perdita $\mathbb{L}(\theta, a)$ definita come

$$\mathbb{L}(\theta, a) = \log \frac{a}{\theta} + \frac{\theta}{a} - 1$$

   (a) Determinare l'espressione della perdita finale attesa $\rho_\pi(a; \mathbf{z}_n)$ in funzione di a e di valori attesi a posteriori di opportune funzioni di Θ, considerando una distribuzione a priori **generica**.

   (b) Mostrare che la perdita finale attesa determinata al punto precedente è minima per è $a^\star = \mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n)$.

   (c) Determinare l'espressione di $a^\star$ che si ottiene assumendo che $\Theta \sim$ Inv-Gamma(α, β).

---

[1] Ricordare che, se $X \sim$ Inv-Gamma(α, β), allora $f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} e^{-\beta/x}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1},\ \alpha > 1$ e $\mathbb{V}(X) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},\ \alpha > 2$.

Soluzione

(1) Si verifica facilmente che $d_{mv} = \frac{\overline{x}_n}{2}$.

(2) Poichè $X_i|\theta \sim \text{Exp}(2\theta) = \text{Ga}(1, \texttt{scale} = 2\theta)$ e $\sum_{i=1}^n X_i|\theta \sim \text{Ga}(n, \texttt{scale} = 2\theta)$ si verifica facilmente che $\mathbb{E}_\theta\left[d_{mv}\right] = \theta$, $\mathbb{V}_\theta\left[d_{mv}\right] = R(\theta, d_{mv}) = \frac{\theta^2}{n}$.

(3) $r_\pi(d_{mv}) = \frac{\mathbb{E}_\pi[\Theta^2]}{n} = \frac{\mathbb{V}_\pi[\Theta]+\mathbb{E}_\pi[\Theta]^2}{n}$ da cui la soluzione.

(4) $\psi = \mathbb{P}_\theta[X > 2] = 1 - \int_0^2 \frac{1}{2\theta} \cdot e^{-x/(2\theta)} dx = e^{-\theta}$. Si ha quindi che $\widehat{\psi}_{mv} = e^{-2/\overline{X}_n}$ (equivarianza smv).

(5) $\ell(\theta) \propto \theta^{-n} e^{-s_n/2\theta}$ e quindi $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \frac{1}{\theta^{\overline{\alpha}+1}} e^{-\overline{\beta}/\theta}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + n$ e $\overline{\beta} = \beta + \frac{s_n}{2}$ e $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Quindi anche la densità a posteriori è di tipo gamma inversa.

(6) Si verifica facilmente che $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$ e quindi $\pi_j(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$. Si ottiene quindi che $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{Inv-Ga}(n, \frac{s_n}{2})$, che coincide con la densità a posteriori del caso coniugato generale se si pone $\alpha = \beta = 0$.

(7a) $X_i|\theta \sim \text{Exp}(2\theta) = \text{Ga}(1, \texttt{scale} = 2\theta)$ allora $s_n = \sum_{i=1}^n X_i|\theta \sim \text{Ga}(n, \texttt{scale} = 2\theta)$ (vedi proprietà v.a. gamma con parametrizzazione scala).

(7b) Sempre per le proprietà delle v.a. gamma con parametrizzazione scala si ha che $Q(\theta, \mathbf{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\theta} \sim \text{Ga}(n, 1)$, qualunque sia $\theta > 0$. $Q(\theta, \mathbf{X}_n)$ è quindi una quantità pivotale per θ. Applicando il metodo delle QP si ha quindi che $C = \left[\frac{s_n}{2q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{s_n}{2q_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$ è un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per θ, con q_ϵ quantile della v.a. $\text{Ga}(n, 1)$.

(8) $\lambda_{21}(\mathbf{z}_n) = \left(\frac{\theta_1}{\theta^2}\right)^n \exp\left\{-\frac{s_n}{2}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right\}$. Tale quantità è crescente in s_n per ogni coppia θ_1, θ_2 con $\theta_2 > \theta_1$ in quanto, in tali casi, $\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} < 0$.

(9a) Per il teo. di KR e il sistema di ipotesi considerato in questo caso, i test UMP hanno regione di rifiuto del tipo $\sum_{i=1}^n X_i < k$, $k > 0$. Utilizzando la statistica test pivotale $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\theta_0}$ che, sotto H_0 ha distribuzione $\text{Ga}(n, 1)$, il test UMP di ampiezza α rifiuta H_0 se $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\theta_0} < q_\alpha$, con q_α quantile di livello α della v.a. $\text{Ga}(n, 1)$.

(9b) Per il test di ampiezza α che abbiamo determinato abbiamo

$$\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\theta_0} < q_\alpha\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\theta} < \frac{\theta_0}{\theta} q_\alpha\right) = \mathbb{F}\left(\frac{\theta_0}{\theta} q_\alpha\right),$$

con $\mathbb{F}(\cdot)$ funzione di ripartizione della v.a. $\text{Ga}(n, 1)$.

(10a) Si ha che $\rho_\pi(a, \mathbf{z}_n) = \log a - \mathbb{E}_\pi[\log \Theta|\mathbf{z}_n] + \frac{1}{a}\mathbb{E}_\pi[\Theta|\mathbf{z}_n] - 1$.

(10b) Per trovare il minimo (rispetto alla variabile a), consideriamo

$$\frac{d}{da}\rho_\pi(a; \mathbf{z}_n) = \frac{1}{a} - 0 - \frac{1}{a^2}\mathbb{E}_\pi[\Theta|\mathbf{z}_n] - 0 = \iff a = \mathbb{E}_\pi[\Theta|\mathbf{z}_n] = a^\star.$$

Si tratta di punto di minimo in quanto $\left.\frac{d^2}{da^2}\rho_\pi(a; \mathbf{z}_n)\right|_{a=a^\star} > 0$.

(10c) Tenendo conto dei punti (9b) e (5) abbiamo che $a^\star = \mathbb{E}_\pi[\Theta|\mathbf{z}_n] = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}-1} = \frac{\alpha+n}{\beta+s_n/2}$.