Cognome .... **Nome** .... **N. matr.** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 20–22 gennaio (solo un numero limitato); ◯ 23–24 gennaio; ◯ 29–31 gennaio; ◯ 5–7 febbraio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito solo l'uso di uno dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-2) - |x+1|\,,$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

2.
a) Trovare le radici quinte di $(1+i)^5$ e disegnarle nel piano complesso;
b) Sapendo che il polinomio $P(z) = z^4 - 4z^3 + 16z^2 - 12z + 39$ ammette $z_1 = \sqrt{3}\,i$ come zero, trovarne gli altri zeri.

---

3. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le 4x^2 - x^6\right\}.$$

---

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\alpha - \frac{\cos(2x)}{2}\right)^{2x+1} \quad (\alpha \ge \tfrac{1}{2}), \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\cosh(2x) + \cos x)}{\log(1+2x) - 2x - \beta x^2} \quad (\beta \in \mathbb{R}).$$

---

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e - |x|}{\log|x| - 1}\,,$$

dire se è estendibile nei punti in cui non è definita in modo che sia ivi continua e/o derivabile.

Punteggi: 1: 7 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 16 punti. Valgono anche punteggi parziali.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-2) - |x+1| = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-2) - x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ \operatorname{arctg}(x-2) + x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R}$, non ci sono simmetrie o periodicità.

Limiti significativi: f è continua in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Ricerca di asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x}}_{\to 0} - 1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \right) = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} (\operatorname{arctg}(x-2) - 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$\Longrightarrow$ $y = -x + \frac{\pi}{2} - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Analogamente $y = x - \frac{\pi}{2} + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Derivata prima e monotonia

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-2)^2} - 1 = -\dfrac{(x-2)^2}{1+(x-2)^2} & \text{se } x > -1 \\ \dfrac{1}{1+(x-2)^2} + 1 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\frac{9}{10}; \quad f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \frac{11}{10}.$$

$x = -1$ è punto di non derivabilità (punto angoloso)

Segno di f':

$$f'(x) = 0 \iff x = 2$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-1,2) \cup (2,+\infty)$$

f strettamente crescente in $(-\infty,-1]$

" decrescente in $[-1,+\infty)$

$x=1$ pto di max. assoluto.

Derivata seconda e concavità/convessità

$$f''(x) = -\frac{2(x-2)}{1+(x-2)^2} \qquad \forall x \neq -1$$

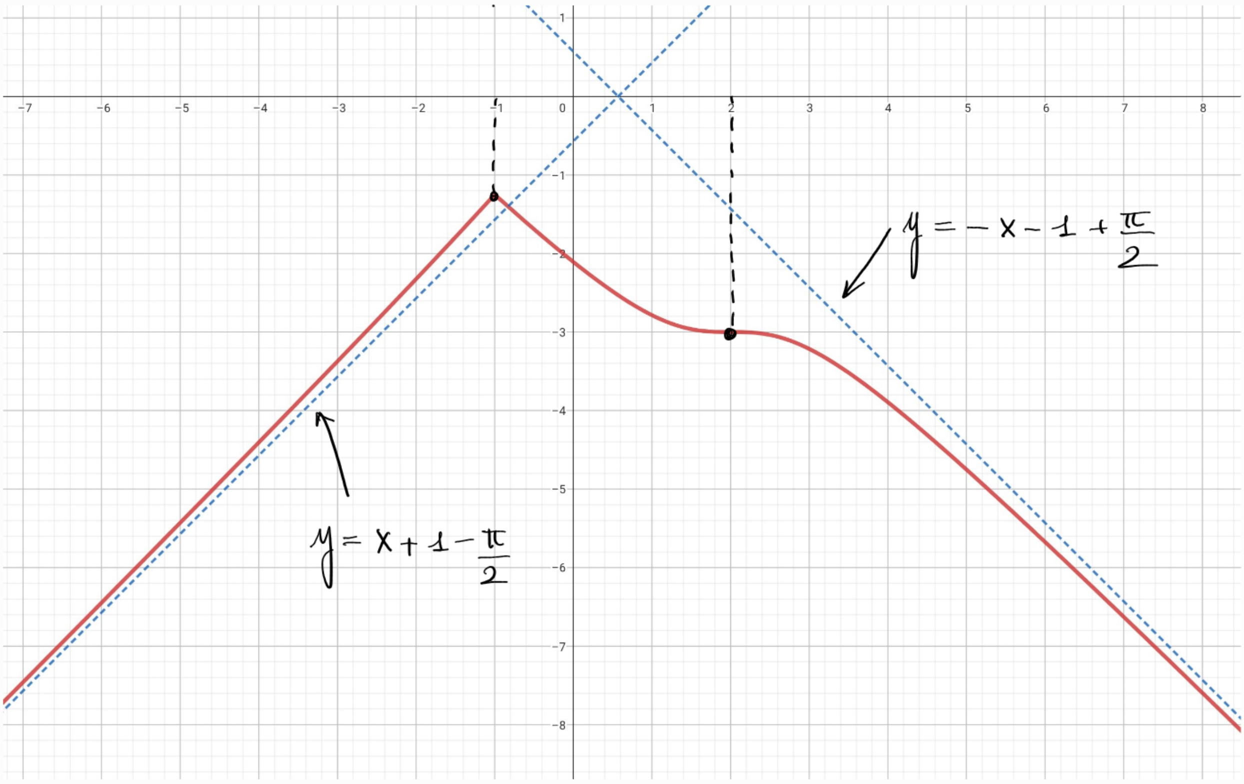
$$f''(x) \begin{cases} = 0 & \iff x = 2 \\ > 0 & \iff x \in (-\infty,-1) \cup (-1,2) \\ < 0 & \iff x \in (2,+\infty). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f strettamente convessa in $(-\infty,-1]$ e in $[-1,2]$, ma non in $(-\infty,2]$!

" concava in $[2,+\infty)$

$x=2$ è punto di flesso a tangente orizzontale.

Il grafico qualitativo è come segue:



$y = -x - 1 + \frac{\pi}{2}$
$y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$

2a) Trovare le radici quinte di $(1+i)^5$.

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \implies (1+i)^5 = 2^{5/2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

Le radici quinte di $(1+i)^5$ hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$ Quindi

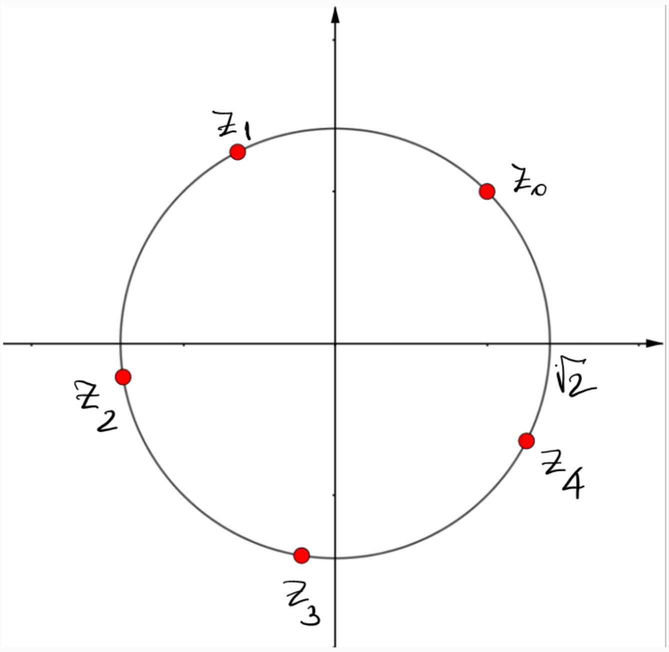
$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{13\pi}{20}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{21\pi}{20}}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{29}{20}\pi}$$

$$z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{37}{20}\pi}$$



2b) Sapendo che $P(z) = z^4 - 4z^3 + 16z^2 - 12z + 39$ ammette $z = \sqrt{3}i$ come zero, trovarne gli altri zeri.

Per il teorema fondamentale dell'Algebra, il polinomio a coeff^{ti} reali $P(z)$ ammette 4 radici (contate con la loro molteplicità) che possono essere reali oppure coppie di complessi coniugati. Poiché $z_1 = \sqrt{3}i$ è una radice, anche $z_2 = \bar{z}_1 = -\sqrt{3}i$ lo è. Pertanto $P(z)$ è divisibile per $(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) = z^2 + 3$. Effettuando la divisione si ottiene $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 4z + 13)$.

Le altre due radici sono quelle di $z^2 - 4z + 13$, che si trovano con la consueta formula:

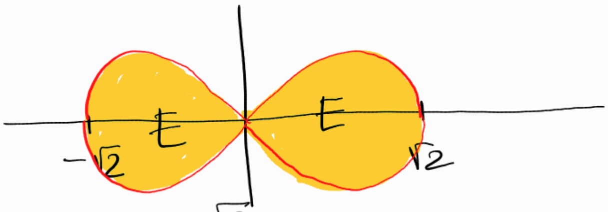
$$z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i.$$

Area di $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 \le 4x^2 - x^6\}$

Dobbiamo imporre $\quad 4x^2 - x^6 \ge 0 \iff x^4 \le 4 \iff -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Quindi

$$E = \{(x,y) : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \,,\; -\sqrt{4x^2 - x^6} \le y \le \sqrt{4x^2 - x^6}\}$$



$$\text{Area} = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4x^2 - x^6}\, dx = 4 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{4 - x^4}\, dx =$$

Poniamo $\quad x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{4 - t^2}\, dt$$

Per parti:
$$\int_0^2 \sqrt{4 - t^2}\, dt = \underbrace{t\sqrt{4 - t^2}\Big|_0^2}_{=0} + \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{4 - t^2}}\, dt =$$

$$= \underbrace{-\int_0^2 \sqrt{4 - t^2}\, dt}_{\text{porto a 1° membro}} + 4 \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \sqrt{4 - t^2}\, dt = 2 \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} =$$

$$= 2 \arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Quindi $\quad \text{Area}(E) = 2\pi$

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}\right)^{2x+1}$ $\left(\alpha\geq\frac{1}{2}\right)$

Osserviamo, che in ogni intervallo di ampiezza π, $\left(\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}\right)$ oscilla tra $\alpha-\frac{1}{2}$ e $\alpha+\frac{1}{2}$.

Pertanto, detta $f(x)$ la funzione di cui vogliamo calcolare il limite, si ha:

- se $\alpha=\frac{1}{2}$, $\left(\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}\right)$ oscilla tra 0 e 1, quindi la funzione oscilla tra $0^{3x+2}=0$ e $1^{3x+2}=1$.

  $\Rightarrow$ il limite non esiste.

  Per provarlo rigorosamente, basta utilizzare il teorema ponte con le successioni $a_n=\frac{\pi}{2}+n\pi\to+\infty$, $b_n=n\pi\longrightarrow+\infty$ e si ha $f(a_n)=1$, $f(b_n)=0$.

- Se $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$, allora $\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}$ oscilla tra $\alpha-\frac{1}{2}<1$ e $\alpha+\frac{1}{2}>1$.

  Prendendo le stesse successioni a_n, b_n di prima, si ha

  $$f(a_n)=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{2a_n+1}\longrightarrow+\infty$$
  $$f(b_n)=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^{2b_n+1}\longrightarrow 0$$

  Quindi il limite non esiste.

- Se $\alpha=\frac{3}{2}$, allora $\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}$ oscilla tra 1 e 2, quindi

  $$f(a_n)=2^{2a_n+1}\longrightarrow+\infty$$
  $$f(b_n)=1^{2b_n+1}=1\longrightarrow 1$$, quindi il limite non esiste.

- Se $\alpha>\frac{3}{2}$, allora $\alpha-\frac{\cos(2x)}{2}\geq\alpha-\frac{1}{2}>1$, quindi

  $f(x)\geq\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^{2x+1}\longrightarrow+\infty$, pertanto $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Riassumendo:

$$\begin{cases}\text{per } \frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{3}{2} & \text{il limite non esiste}\\ \text{per } \alpha>\frac{3}{2} & \text{il limite vale } +\infty.\end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\cosh(2x)+\cos x\right)}{\log(1+2x)-2x-\beta x^2} =: f(x)$ $\quad(\beta\in\mathbb{R})$

Osservando che

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x\to 0,$$

si ottiene, per $x\to 0^+$:

$$f(x) = \frac{2x+o(x)}{-(2+\beta)x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)} = \frac{2+o(1)}{-(2+\beta)x+\frac{8}{3}x^2+o(x^2)}$$

Pertanto il limite vale:

$$\begin{cases} -\infty & \text{se } \beta > -2 \\ +\infty & \text{se } \beta < -2 \\ +\infty & \text{se } \beta = 2 \end{cases}$$

La funzione $f(x) = \dfrac{e-|x|}{\log|x|-1}$ è definita per $x \neq 0, \pm e$.

Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e-|x|}^{\to e}}{\underbrace{\log|x|-1}_{\to -\infty}} = 0.$$

Osserviamo che, per $x \to e$

$$\log x - 1 = \log\left(\frac{x}{e}\right) = \log\Big(1 + \underbrace{\Big(\frac{x}{e}-1\Big)}_{\to 0}\Big) \sim \frac{x}{e} - 1 = \frac{x-e}{e}$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} \frac{e-x}{\log x - 1} = \lim_{x\to e} \frac{e-x}{\left(\frac{x-e}{e}\right)} = -e$.

Poiché f è pari, ne segue che anche $\displaystyle\lim_{x\to -e} f(x) = -e$.

Quindi f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$: la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0, \pm e \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -e & \text{se } x = \pm e \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$. Vediamo se $\tilde{f}$ è derivabile in $x=0$, $x = \pm e$.

$$\tilde{f}'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \overset{= 0}{\tilde{f}(0)}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e-x}^{\to e}}{\underbrace{x(\log x - 1)}_{\to 0^-}} = -\infty.$$

Poiché $\tilde{f}$ è pari, ne segue che $\tilde{f}'_-(0) = +\infty$: $\tilde{f}$ non è derivabile in $x=0$ (ha una cuspide).

$$\tilde{f}'(e) = \lim_{x\to e} \frac{f(x)+e}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{e-x}{\log x - 1} + e}{x-e} =$$

$$= \lim_{x\to e} \frac{e-x+e(\log x - 1)}{(x-e)\boxed{(\log x - 1)}} \sim \frac{x-e}{e} = \lim_{x\to e} \frac{e-x+e(\log x-1)}{\frac{(x-e)^2}{e}} =$$

[osservato che per Taylor $\log x - 1 = \log\Big(1 + \underbrace{\frac{x-e}{e}}_{\downarrow\, 0}\Big) = \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e} + o((x-e)^2)$]

$$= \lim_{x\to e} \frac{\cancel{e} - x + (x \cancel{- e}) - \frac{(x-e)^2}{2e} + o(x-e)^2}{\frac{(x-e)^2}{e}} = -\frac{1}{2}$$

e, per simmetria, $\tilde{f}'(-e) = +1/2$.

Ovviamente si poteva anche calcolare $\tilde{f}'(e) = \lim_{x\to e} f'(x) = \frac{1}{2}$.

In conclusione: f è estendibile con continuità in tutto $\mathbb{R}$, ma in modo derivabile solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.