Cognome .... **Nome** .... **N. matr.** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 20–22 gennaio (solo un numero limitato); ◯ 23–24 gennaio; ◯ 29–31 gennaio; ◯ 5–7 febbraio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito solo l'uso di uno dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) - |x-2| \,,$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

2.
a) Trovare le radici quinte di $(1-i)^5$ e disegnarle nel piano complesso;
b) Sapendo che il polinomio $P(z) = z^4 + 4z^3 + 15z^2 + 8z + 26$ ammette $z_1 = \sqrt{2}\, i$ come zero, trovarne gli altri zeri.

---

3. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 9x^2 - x^6\right\}.$$

---

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}\right)^{3x+2} \quad (\alpha \geq \tfrac{1}{2}), \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\cosh x - \cos(2x))}{3x - \log(1+3x) - \beta x^2} \quad (\beta \in \mathbb{R}).$$

---

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x| - e}{\log|x| - 1}\,,$$

dire se è estendibile nei punti in cui non è definita in modo che sia ivi continua e/o derivabile.

Punteggi: **1:** 7 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 16 punti. Valgono anche punteggi parziali.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) - |x-2| = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) - x+2 & \text{se } x \geq 2 \\ \operatorname{arctg}(x-1) + x-2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R}$, non ci sono simmetrie o periodicità.

Limiti significativi: f è continua in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Ricerca di asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} \right) = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} (\operatorname{arctg}(x-1) + 2) = \frac{\pi}{2} + 2$$

$\Longrightarrow$ $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Analogamente $y = x - \frac{\pi}{2} - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Derivata prima e monotonia

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-1)^2} - 1 = -\dfrac{(x-1)^2}{1+(x-1)^2} & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2} + 1 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = -\frac{1}{2}; \quad f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

$x = 2$ è punto di non derivabilità (punto angoloso)

Segno di f':

$f'(x) = 0$ mai

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 2)$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (2, +\infty)$$

f strettamente crescente in $(-\infty, 2]$

" decrescente in $[2, +\infty)$

$x = 2$ pto di max. assoluto.

Derivata seconda e concavità/convessità

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2} \qquad \forall x \neq 2$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 1$$

$$> 0 \iff x \in (-\infty, 1)$$

$$< 0 \iff x \in (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

$\Rightarrow$ f strettamente convessa in $(-\infty, 1]$

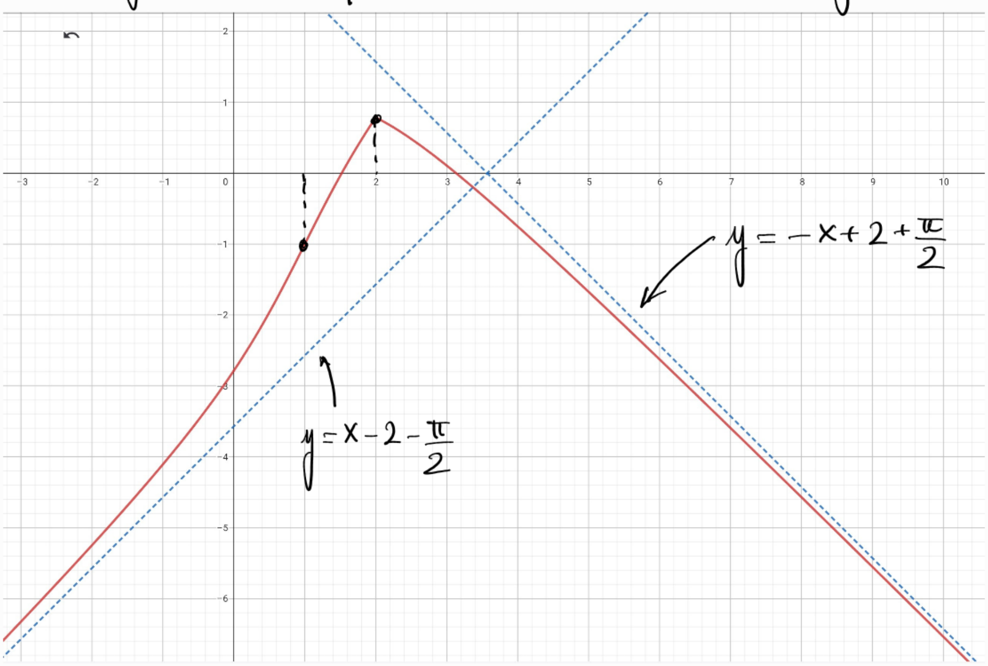
" concava in $[1, 2]$ e in $[2, +\infty)$

e, tenuto conto delle derivate destra e sinistra in $x=2$,

anche in $[1, +\infty)$.

$x = 1$ è punto di flesso.

Il grafico qualitativo è come segue:



2a) Trovare le radici quinte di $(1-i)^5$.

$$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \implies (1-i)^5 = 2^{5/2} e^{-i\frac{5}{4}\pi}$$

Le radici quinte di $(1-i)^5$ hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento

$$\theta_k = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Quindi

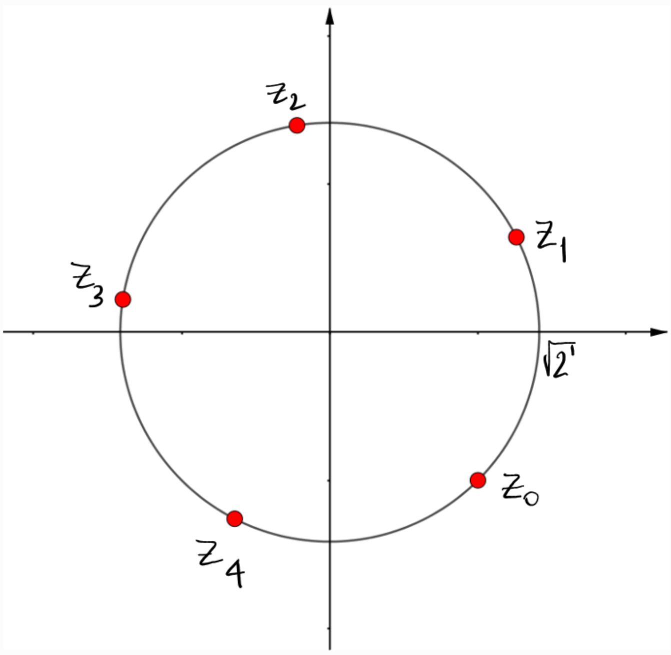
$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1-i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{20}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{20}}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{19}{20}\pi}$$

$$z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{27}{20}\pi}$$



2b) Sapendo che $P(z) = z^4 + 4z^3 + 15z^2 + 8z + 26$ ammette $z = \sqrt{2}i$ come zero, trovarne gli altri zeri.

Per il teorema fondamentale dell'Algebra, il polinomio a coeff^{ti} reali $P(z)$ ammette 4 radici (contate con la loro molteplicità) che possono essere reali oppure coppie di complessi coniugati. Poiché $z_1 = \sqrt{2}i$ è una radice, anche $z_2 = \bar{z}_1 = -\sqrt{2}i$ lo è. Pertanto $P(z)$ è divisibile per $(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = z^2 + 2$. Effettuando la divisione si ottiene $P(z) = (z^2+2)(z^2+4z+13)$.

Le altre due radici sono quelle di $z^2+4z+13$, che si trovano con la consueta formula:

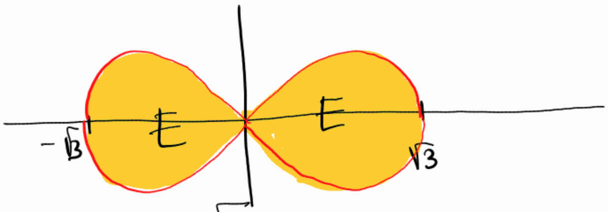
$$z_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i.$$

Area di $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y^2 \leq 9x^2 - x^6\}$

Dobbiamo imporre $\quad 9x^2 - x^6 \geq 0 \iff x^4 \leq 9 \iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Quindi

$$E = \{(x,y) : -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \; -\sqrt{9x^2 - x^6} \leq y \leq \sqrt{9x^2 - x^6}\}$$



$$\text{Area} = 4\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{9x^2 - x^6}\, dx = 4\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{9 - x^4}\, dx =$$

Poniamo $\quad x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$

$$= 2\int_0^3 \sqrt{9 - t^2}\, dt$$

Per parti: $\quad \displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-t^2}\, dt = \underbrace{t\sqrt{9-t^2}\Big|_0^3}_{=0} + \int_0^3 \frac{t^2}{\sqrt{9-t^2}}\, dt =$

$$= \underbrace{-\int_0^3 \sqrt{9-t^2}\, dt}_{\text{porto a 1° membro}} + 9\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \sqrt{9-t^2}\, dt = \frac{9}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{3}{2}\int_0 \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}$$

Quindi $\quad \text{Area}(E) = \dfrac{9\pi}{2}$

Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \left(\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}\right)^{3x+2}$ $\quad (\alpha \geq \frac{1}{2})$

Osserviamo, che in ogni intervallo di ampiezza π, $\left(\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}\right)$ oscilla tra $\alpha - \frac{1}{2}$ e $\alpha + \frac{1}{2}$.

Pertanto, detta $f(x)$ la funzione di cui vogliamo calcolare il limite, si ha:

- se $\alpha = \frac{1}{2}$, $\left(\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}\right)$ oscilla tra 0 e 1, quindi la funzione oscilla tra $0^{3x+2} = 0$ e $1^{3x+2} = 1$.
  $\Rightarrow$ il limite non esiste.
  Per provarlo rigorosamente, basta utilizzare il teorema ponte con le successioni $a_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \to +\infty$, $b_n = \frac{3\pi}{4} + n\pi \to +\infty$, e si ha $f(a_n) = 1$, $f(b_n) = 0$.
- Se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, allora $\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}$ oscilla tra $\alpha - \frac{1}{2} < 1$ e $\alpha + \frac{1}{2} > 1$.
  Prendendo le stesse successioni a_n, b_n di prima, si ha
  $$f(a_n) = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^{3a_n+2} \to +\infty$$
  $$f(b_n) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{3b_n+2} \to 0$$
  Quindi il limite non esiste.
- Se $\alpha = \frac{3}{2}$, allora $\alpha + \frac{\sin(2x)}{2}$ oscilla tra 1 e 2, quindi
  $$f(a_n) = 2^{3a_n+2} \to +\infty$$
  $$f(b_n) = 1^{3b_n+2} = 1 \to 1$$, quindi il limite non esiste.
- Se $\alpha > \frac{3}{2}$, allora $\alpha + \frac{\sin(2x)}{2} \geq \alpha - \frac{1}{2} > 1$, quindi
  $f(x) \geq \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{3x+2} \to +\infty$, pertanto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Riassumendo:

$$\begin{cases} \text{per } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2} & \text{il limite non esiste} \\ \text{per } \alpha > \frac{3}{2} & \text{il limite vale } +\infty. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \boxed{\dfrac{x(\cosh x - \cos(2x))}{3x - \log(1+3x) - \beta x^2}} =: f(x)$ $(\beta \in \mathbb{R})$

Osservando che $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$,

$\log(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$,

si ottiene, per $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\frac{5}{2}x^3 + o(x^3)}{\left(\frac{9}{2} - \beta\right)x^2 - 9x^3 + o(x^3)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq \frac{9}{2} \\ -\frac{5}{18} & \text{se } \beta = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

La funzione $f(x) = \dfrac{|x|-e}{\log|x|-1}$ è definita per $x \neq 0, \pm e$.

Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{|x|-e}^{\to -e}}{\underbrace{\log|x|-1}_{\to -\infty}} = 0.$$

Osserviamo che, per $x \to e$

$$\log x - 1 = \log\left(\frac{x}{e}\right) = \log\Big(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{e}-1\right)}_{\to 0}\Big) \sim \frac{x}{e} - 1 = \frac{x-e}{e}$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} \frac{x-e}{\log x - 1} = \lim_{x\to e} \frac{x-e}{\left(\frac{x-e}{e}\right)} = e.$

Poiché f è pari, ne segue che anche $\displaystyle\lim_{x\to -e} f(x) = e.$

Quindi f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$: la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0, \pm e \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ e & \text{se} \quad x = \pm e \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$. Vediamo se $\tilde{f}$ è derivabile in $x=0$, $x=\pm e$.

$$\tilde{f}'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \overset{=0}{\tilde{f}(0)}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x-e}^{\to -e}}{\underbrace{x(\log x - 1)}_{\to 0^-}} = +\infty.$$

Poiché $\tilde{f}$ è pari, ne segue che $\tilde{f}'_-(0) = -\infty$: $\tilde{f}$ non è derivabile in $x=0$ (ha una cuspide).

$$\tilde{f}'(e) = \lim_{x\to e} \frac{f(x) - e}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{x-e}{\log x - 1} - e}{x-e} =$$

$$= \lim_{x\to e} \frac{x - e - e(\log x - 1)}{(x-e)\boxed{(\log x - 1)}} \sim \frac{x-e}{e} = \lim_{x\to e} \frac{x-e-e(\log x - 1)}{\frac{(x-e)^2}{e}} =$$

$\left[\text{osservato che per Taylor} \quad \log x - 1 = \log\left(1 + \underbrace{\frac{x-e}{e}}_{\to 0}\right) = \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e} + o((x-e)^2)\right]$

$$= \lim_{x \to e} \frac{\cancel{(x-e)} - \cancel{(x-e)} + \frac{(x-e)^2}{2e} + o(x-e)^2}{\frac{(x-e)^2}{e}} = \frac{1}{2}$$

e, per simmetria, $\tilde{f}'(-e) = -1/2$.

Ovviamente si poteva anche calcolare $\tilde{f}'(e) = \lim_{x \to e} f'(x) = \frac{1}{2}$.

In conclusione: f è estendibile con continuità in tutto $\mathbb{R}$, ma in modo derivabile solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.