

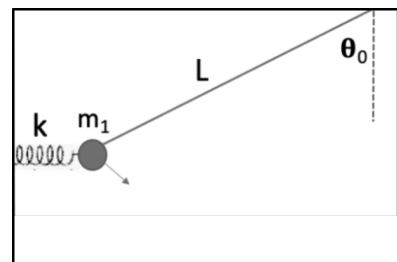
Esame di Fisica - Scienze Biologiche

Marta De Luca, Francesco Macheda, Roberto Maoli, Lorenzo Monacelli, Raffaella Schneider

24 Gennaio 2025

Esercizio 1

Un pendolo avente lunghezza $L = 40.0$ cm e massa $m_1 = 0.225$ kg si trova vincolato a muro verticale tramite una molla ideale di costante elastica $k = 64.0$ N/m, come mostrato in figura. Sapendo che all'equilibrio la tensione del filo vale $T = 4.40$ N, calcolare:



1. L'angolo ϑ_0 formato dalla fune rispetto alla verticale.
2. L'allungamento della molla rispetto alla sua lunghezza a riposo.
3. A un tratto la pallina si stacca dalla molla. Calcolare la sua quota nell'istante in cui si stacca dalla molla rispetto al punto di minima quota e modulo, direzione e verso della velocità con cui essa arriva nel punto di minima quota.

Esercizio 2

Una quantità di gas perfetto monoatomico pari a $n = 2$ moli, inizialmente alla pressione $p_A = 1.2$ atm e temperatura $T_A = 540$ K subisce le seguenti trasformazioni:

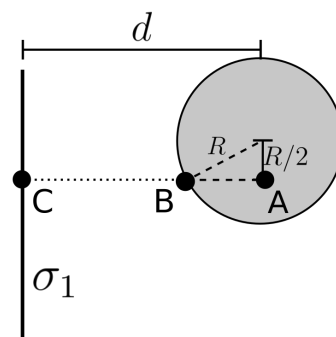
- (i) isoterma reversibile dallo stato iniziale A allo stato B caratterizzato da $V_B = 2V_A$;
- (ii) adiabatica irreversibile dallo stato B allo stato C tale che $V_C = 3V_B$ e $T_C = T_A/2$;
- (iii) isoterma reversibile fino ad un certo stato D;
- (iv) isobara reversibile dallo stato D allo stato iniziale A.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron e calcolare i valori di p_B e V_C ;
2. calcolare il lavoro compiuto o subito dal gas in ogni singola trasformazione;
3. calcolare il calore trasferito in ogni singola trasformazione.
4. Supponendo che la quantità di calore ceduta dal gas nella trasformazione CD sia impiegata per scaldare un sistema termodinamico costituito da un cubetto di ghiaccio di massa $m = 60$ g alla temperatura iniziale $T_i = 0^\circ\text{C}$, definire lo stato finale del sistema.

[calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 333.5$ J/g, calore specifico dell'acqua $c_A = 4.186$ J/gK]

Esercizio 3

Una lastra piana con densità di carica uniforme $\sigma_1 = 3.00 \times 10^{-10}$ C/m² è disposta verticalmente come in figura. Una sfera di raggio $R = 80.0$ cm, il cui centro dista $d = 2.50$ m dalla lastra, ha una carica $Q = -5.50 \times 10^{-9}$ C distribuita uniformemente su tutto il volume. Calcolare



1. La densità di carica della sfera
2. Le componenti vettoriali del campo elettrico presente nel punto A interno alla sfera, allineato verticalmente con il centro da cui dista $R/2$.
3. Le componenti vettoriali del campo elettrico nel punto B posto sulla superficie della sfera
4. La differenza di potenziale tra AB

Soluzioni esercizio 1

1. Considerando la risultante delle forze nulla (situazione di equilibrio) sia lungo x che lungo y si ha:

$$R_x = -kx + T \sin \vartheta_0 = 0$$

$$R_y = T \cos \vartheta_0 - m_1 g = 0$$

Da cui $\arccos \vartheta_0 = \arccos(mg/T) = 60^\circ$

[4 pt]

2. Sempre dal sistema di sopra si ricava che $x = m_1 g \tan \vartheta_0 / k = 6.00 \text{ cm}$

[2 pt]

3. All'istante in cui si stacca dalla molla la pallina si trova ad un'altezza $y_0 = L(1 - \cos \vartheta_0) = 20.0 \text{ cm}$

rispetto al piano orizzontale. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha che la velocità con cui la pallina raggiunge la quota più bassa (il piano orizzontale nel disegno) è: $v = \sqrt{2gy_0} = 1.98 \text{ m/s}$ diretta orizzontalmente, verso destra.

[4 pt]

Soluzioni esercizio 2

1. Utilizzando $pV = \text{cost}$ per le trasformazioni isoterme reversibili e $\frac{V}{T} = \text{cost}$ per la trasformazione isobara reversibile si trovano i seguenti valori:

$$p_A = p_D = 1.2 \text{ atm} \quad p_B = p_A/2 = 0.6 \text{ atm} \quad p_C = p_A/12 = 0.1 \text{ atm} \quad V_B = 2V_A \quad V_C = 6V_A \quad V_D = V_A/2$$

con V_A calcolato con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 73.9 \text{ litri} \quad V_C = 443.2 \text{ litri}$$

[2 pt]

2. Per il lavoro associato alle diverse trasformazioni si ha:

isoterma reversibile: $W_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 6224 \text{ J}$

adiabatica irreversibile $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) = 6734 \text{ J}$ con $c_V = \frac{3}{2}R$

isoterma reversibile: $W_{CD} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = -11156 \text{ J}$

isobara reversibile: $W_{DA} = p_A(V_A - V_D) = 4492 \text{ J}$

[3 pt]

3. Per il calore associato alle diverse trasformazioni si ha:

isoterma reversibile: $Q_{AB} = W_{AB} = 6224 \text{ J}$

adiabatica irreversibile $Q_{BC} = 0$

isoterma reversibile: $Q_{CD} = W_{CD} = -11156 \text{ J}$

isobara reversibile: $Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = 11224 \text{ J}$ con $c_p = \frac{5}{2}R$

[2 pt]

4. Il calore necessario per il passaggio di stato di tutto il ghiaccio è dato da $Q = \lambda m = 333.5 \cdot 60 = 20010 \text{ J}$.

Siccome $Q_{CD} = 11156 \text{ J}$ in modulo, non tutto il ghiaccio si trasformerà in acqua; lo stato finale sarà una miscela di acqua e ghiaccio a $T = 0^\circ\text{C}$ in cui $m_A = \frac{Q_{CD}}{\lambda} = 33.5 \text{ g}$ si sono trasformati in acqua.

[3 pt]

Soluzioni esercizio 3

1. La densità di carica è semplicemente

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -2.56 \times 10^{-9} \text{ C/m}^3$$

[1] pt]

2. Il campo elettrico nel punto A è dato dalla somma vettoriale della sfera piena e dalla lastra. Il campo generato all'interno della sfera piena si ottiene dal teorema di Gauss

$$\Phi_S(E) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Il campo elettrico generato dalla sfera sul punto A è pertanto

$$\vec{E}_{\text{Asphere}} = \frac{R\rho}{6\varepsilon_0} \widehat{OA}$$

dove $\widehat{OA}$ è il versore che congiunge il centro della sfera al punto A , diretto verso il basso

$$\widehat{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A questo va aggiunto il campo generato dalla superficie carica

$$\vec{E}_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo

$$\vec{E}_A = \begin{pmatrix} 16.9 \text{ V m}^{-1} \\ 38.6 \text{ V m}^{-1} \end{pmatrix}$$

[3 pt]

3. Nel punto B siamo all'esterno della sfera, per cui il campo elettrico generato dalla sfera vale

$$\vec{E}_{B\text{sphere}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \widehat{OB}$$

Il versore $\widehat{OB}$ punta dal centro della sfera verso B . Con un po' di semplice trigonometria, si riconosce che l'angolo formato dal triangolo OBA è di 30 gradi (il cateto opposto all'angolo misura $R/2$: la metà dell'ipotenusa).

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

da cui otteniamo

$$\widehat{OB} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

A questo dobbiamo aggiungere il campo generato dalla lamina e diretto lungo x .

$$\vec{E}_B = \begin{pmatrix} 83.8 \text{ V/m} \\ 38.6 \text{ V/m} \end{pmatrix}$$

[3 pt]

4. Scegliendo a 0 il potenziale della lamina nel punto C , il potenziale della lamina può essere scritto come

$$V_\sigma(x, y) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$$

che soddisfa la relazione

$$E_\sigma = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

La differenza di potenziale tra B e C è quindi

$$\Delta V_{BC} = V_C - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (d - R \cos \frac{\pi}{6}) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}} = 72.9 \text{ V}$$

dove bisogna fare attenzione a calcolare le corrette distanze tra $OC = \sqrt{d^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$ e $CB = (d - R \cos \frac{\pi}{6})$.

La differenza di potenziale tra B e A invece prevede di calcolare il potenziale all'interno della sfera. In questo caso è

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \text{const.}$$

Dove la costante può essere usata per imporre la continuità del potenziale al bordo della sfera. In realtà, per calcolare la differenza di potenziale tra due punti interni, si cancella e possiamo buttarla.

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (d - R \cos \frac{\pi}{6}) + \frac{\rho}{6\varepsilon_0} \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d = 34.9 \text{ V}$$

[3 pt]