Laboratorio di decisioni statistiche - Prova finale 2 - 14 gennaio 2025 - Foglio B

Nome, cognome e matricola: ______________________________

1. (MC) - Si consideri $\delta = 0.3$, $\omega \sim \text{Beta}(2, 3)$ e $W_\delta(\omega) = 2 \cdot |\delta - \omega|$. Calcolare con MC il valore del criterio della soglia critica, assumendo $\lambda = 0.25$. $\big[$**Suggerimento**: $K_{sc} = \mathbb{P}[W_\delta(\omega) > \lambda]\big]$

   Risultato:

   Codice

2. (MC) - Modello Gamma(3, `rate = 4`). Calcolare con MC il valore atteso **frequentista** della statistica $m(\mathbf{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$, assumendo $n = 20$.

   Risultato:

   Codice

3. (MC) - Si consideri $X_i, \ldots, X_n|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d. e una distribuzione a priori Beta(4,6) per Θ. Supporre inoltre che $n = 20$ e che la somma delle osservazioni sia pari a 10. Calcolare il valore atteso a posteriori $\mathbb{E}\left[-\Theta \cdot \ln(\Theta) - (1-\Theta) \cdot \ln(1-\Theta)|z_n\right]$ utilizzando il metodo Monte Carlo.

Risultato:

Codice

4. (MC) - $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \text{EN}(1/\theta)$, $n = 10$. Assumendo $\theta = 5$, calcolare con MC la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo

$$I_\gamma = \left[\frac{\overline{X}_n}{1.42}, \frac{\overline{X}_n}{0.62}\right]$$

Risultato:

Codice

5. (MC) - Con riferimento all' Esercizio 4, calcolare con Monte Carlo la lunghezza attesa dell' intervallo I_γ precedentemente definito e confrontarla con la lunghezza attesa dell' intervallo

$$\tilde{I}_\gamma = \left[\overline{X}_n \pm 1.28 \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

Risultato:

Codice

6. (Analitico + MC) - $X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Pois}(\theta)$. Sia $d(\mathbf{Z}_n) = \overline{X}_n$. Sapendo che $d(\mathbf{Z}_n)$ è non distorto per θ, calcolare analiticamente $R(\theta, d)$ con perdita quadratica. Calcolare poi con MC il valore del rischio di Bayes $r_\pi(d) = \mathbb{E}_\pi[R(\Theta, d)]$ assumendo $n = 8$ e, come distribuzione a priori per Θ, una densità Gamma(7, `rate` = 5). [**Suggerimento:** usare MC per il valore atteso rispetto alla distribuzione a priori.]

Risultato:

Codice

7. (MC) - $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(4,\ \theta)$, i.i.d. - Calcolare con MC la probabilità che la statistica campionaria A_n sia minore di $k = 40$, dove $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^4$, ovvero $\mathbb{P}_\theta[A_n < k]$, supponendo che $\theta = 4$ e $n = 25$.

   Risultato:

   Codice

8. (MC) - $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{EN}(\theta)$, $n = 30$. Si consideri un sistema di ipotesi del tipo $H_0 : \theta = 3$ vs $H_1 : \theta > 3$ con regione di rifiuto $R = \{z_n \in \mathcal{Z} : \sum_{i=1}^{n} X_i < k\}$, $k = 7.2$. Stimare con Monte Carlo:

   a) la probabilità di errore di primo tipo α

   b) il valore della funzione di potenza $\eta(\theta)$ in $\theta = 4$.

   $\alpha =$ $\eta(\theta = 4) =$

   Codice

9. **ESERCIZIO FACOLTATIVO.** Con riferimento al Punto 4, considerare il generico intervallo

$$\tilde{I}_\gamma = \left[\overline{X}_n \pm z_{1-\gamma/2} \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

in cui $z_{1-\gamma/2}$ indica il quantile a livello $1 - \frac{\gamma}{2}$ della N(0,1). Scrivere una funzione `optimal = function(n)` che calcoli la copertura media dell' intervallo al variare di n, assumendo $\gamma = 0.05$, $M = 10^4$ simulazioni di Monte Carlo e ponendo il `seed` pari a 123 **all' interno** della funzione stessa. Determinare, tramite la funzione precedentemente scritta, $n^\star$ pari al più piccolo n tale che la copertura media stimata sia > 0.85.

$n^\star$

Codice