Teoria statistica delle decisioni – a.a. 24-25 - **Parte 1 - 08-01-25** [**SI CORREGGONO SOLO QUESTI FOGLI**]
RIDUZIONE COMPITO: chi ha diritto alla riduzione può saltare i quesiti * e *

Cognome, nome e n. di matricola: ____________________

PROBLEMA A. Sia $\mathbf{Z}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\mathrm{N}(0, \theta)$. Sia $\mathbf{z}_n$ un campione osservato. Assumere che $\Theta \sim \mathrm{InvGa}(\alpha, \mathtt{rate} = \beta)$ (vedi nota a piè di pagina [1]).

1. (a) Determinare la funzione di verosimiglianza $\ell(\theta; \mathbf{z}_n)$.
(b) Verificare che $d_{mv}(\mathbf{z}_n)$, stima di massima verosimiglianza di θ, coincide con S_0^2.

2. (a) Determinare la distribuzione a posteriori di Θ e $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n)$.
(b) Determinare il valore atteso della v.a. $Y(\mathbf{Z}_n) = \mathbb{E}(\Theta|\mathbf{Z}_n)$ rispetto alla distribuzione **predittiva a priori**.

3. (a) Verificare che la distribuzione a priori di Jeffreys per Θ coincide con $\pi_j(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$.
(b) Determinare $\pi_j(\theta|\mathbf{z}_n)$ e il corrispondente valore atteso $\mathbb{E}_j[\Theta|\mathbf{z}_n]$.
(c) Per quali valori di α e β della distribuzione coniugata di Θ il valore atteso a posteriori ottenuto nel quesito 2a coincide con $\mathbb{E}_j[\Theta|\mathbf{z}_n]$?

4. Considerare $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$. Assumere che $\theta_1 > \theta_0$.
(a) Determinare l'espressione di $B_{01}(\mathbf{z}_n)$.
(b) Verificare che $B_{01}(\mathbf{z}_n) > 1 \;\Leftrightarrow\; S_0^2 < K$ e determinare l'espressione di K.

5. Sia $H(\mathbf{Z}_n) = -\frac{1}{n} \ln \left[(2\pi)^{\frac{n}{2}} p_\theta(\mathbf{Z}_n)\right] \Big|_{\theta=1}$.
(a) Determinare l'espressione di $H(\mathbf{Z}_n)$ in funzione di S_0^2. (Sugg.: partire dall'espressione $\ell(\theta; \mathbf{z}_n)$ trovata nel punto 1).
(b) Calcolare $\mathbb{E}_\theta[H(\mathbf{Z}_n)]$ e $\mathbb{V}_\theta[H(\mathbf{Z}_n)]$ (rispetto alla **distribuzione campionaria** di S_0^2).
(c) Determinare l'espressione di $\mathbb{F}_\theta(h)$, con $\mathbb{F}(\cdot)$ funzione di ripartizione di H, in termini della funzione di ripartizione campionaria di S_0^2.

Soluzione

(1a) $\ell(\theta; \mathbf{z}_n) \propto \frac{1}{\theta^{n/2}} e^{-\frac{n}{2\theta} S_0^2}$, $\theta > 0$, $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(1b) Si verifica facolmente che $\frac{d}{d\theta} \ln \ell(\theta; \mathbf{z}_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = S_0^2$ e che $\frac{d}{d\theta} \ln \ell(\theta; \mathbf{z}_n) < 0 \;\forall \theta > 0$. Si ha quindi che $d_{mv} = S_0^2$.

(2a) $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{InvGa}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ con $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{n}{2}$ e $\overline{\beta} = \beta + \frac{n}{2} S_0^2$.
$\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{x}_n] = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}-1} = \ldots = \frac{2\beta + nS_0^2}{2\alpha+n-2}$.

(2b) $\mathbb{E}_m\left(\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{x}_n]\right) = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}-1} = \frac{2\beta + n\mathbb{E}_m[S_0^2]}{2\alpha+n-2}$ con $\mathbb{E}_m[S_0^2] = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{S_0^2|\theta}(S_0^2)] = \mathbb{E}_\Theta[\Theta] = \frac{\beta}{\alpha-1}$. Sostituendo si trova quanto richiesto.

(3a) $\pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$. Si può verificare calcolando esplicitamente $I_n(\theta)$ oppure ricordando che $I_n(\theta) = [\mathtt{cr}(\theta)]^{-1} = \mathbb{V}_\theta[\overline{X}_n] = \frac{\theta}{n}$ (essendo $\overline{X}_n$ UMVUE unico per i teoremi di RB-LS, famiglia esponenziale uniparametrica).

(3b) Si verifica facilmente che $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$ è una densità InvGa di parametri $(\overline{\alpha}_J = \frac{n}{2}, \overline{\beta}_J = \frac{n}{2}S_0^2)$. Pertanto $\mathbb{E}_J[\Theta|\mathbf{x}_n] = \frac{nS_0^2}{n-2}$.

(3c) $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_J$ per $\alpha = 0$; $\overline{\beta} = \overline{\beta}_J$ per $\beta = 0$.

(4a) $B_{01}(\mathbf{z}_n) = \frac{\ell(\theta_0)}{\ell(\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}S_0^2\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)}$.

(4b) $B_{01}(\mathbf{z}_n) > 1 \iff -\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) S_0^2 > \frac{n}{2} \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \iff$ (studio dei segni) $\iff S_0^2 < K = \frac{\theta_0\theta_1}{\theta_0+\theta_1} \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)$

(5a) Si verifica facilmente che $H(\mathbf{Z}_n) = \frac{1}{2} S_0^2$.

(5b) $\mathbb{E}_\theta[H(\mathbf{Z}_n)] = \frac{1}{2}\theta$; $\mathbb{V}_\theta[H(\mathbf{Z}_n)] = \frac{\theta^2}{2n}$.

(5c) Per definizione, la f.r. di H (con riferimento alla distribuzione campionaria) è $\mathbb{F}_\theta(h) = \mathbb{P}_\theta[H(\mathbf{Z}_n) \le h] = \mathbb{P}_\theta[S_0^2 \le 2h] = \overline{\mathbb{F}}(2h)$, dove $\overline{\mathbb{F}}(\cdot)$ indica la f.r. della v.a. $\mathrm{Ga}\left(\frac{n}{2}, \mathtt{rate} = \frac{n}{2\theta}\right)$.

[1] Ricordare che, se $\Theta \sim \mathrm{InvGa}(\alpha, \mathtt{rate} = \beta)$, la funzione di densità, il valore atteso e la varianza sono rispettivamente uguali a:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\alpha+1}} \exp\left\{-\frac{\beta}{\theta}\right\}, \quad \theta\, 0 \qquad \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\beta}{\alpha-1} \qquad \mathbb{V}[\Theta] = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

PROBLEMA B. Si consideri il problema decisionale con i seguenti elementi:

	W_{δ_1}	W_{δ_2}	W_{δ_3}	$p(\omega)$
ω_1	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
ω_2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Specificare Ω e Δ e rappresentare graficamente i punti-decisione $\mathbf{x}_{\delta_i}$ in $\mathbb{R}^2$.
2. Quale caratteristica ha la decisione δ_2 dal punto di vista dell'analisi preottimale? [Giustificare la risposta].
3. Determinare i valori del criterio del minimax K_m per le tre decisioni e indicare l'insieme delle decisioni ottime rispetto a tale criterio.
4. Ripetere quanto fatto al Punto 3 per il criterio del valore atteso K_{va}.

Soluzione

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ e $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. I tre punti-decisione hanno coordinate $(0, 2)$, $(2, 1)$ e $(1/2, 1/2)$ e si rappresentano nel primo quadrante cartesiano (si evita qui il disegno per brevità).

(2) La decisione δ_2 è inammissibile in quanto $W_{\delta_2}(\omega_i) > W_{\delta_3}(\omega_i)$ per $\omega_i = 1, 2$.

(3) Il valore di K_m per le tre decisioni è $\left(2, 2, \frac{1}{2}1\right)$ e quindi la decisione ottima minimax è δ_3.

(4) Il valore di K_{va} per le tre decisioni è $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2})$ e quindi $\Delta^\star_{va} = \{\delta_1, \delta_3\}$.

PROBLEMA C. Sia S_Δ la porzione del primo quadrante cartesiano limitato inferiormente dalla curva γ di equazione $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ e dalle rette $x = 2$, $y = 2$. Indicare con A e D le intersezioni di γ rispettivamente con le rette $x = 2$ e $y = 2$ e con C l'intersezione delle due rette.

1. (a) Rappresentare graficamente l'insieme S_Δ.
   (b) Determinare le coordinate del punto P_m corrispondente alla decisione ottima rispetto al criterio del minimax K_m e, per tale decisione, calcolare il valore del criterio del valore atteso K_{va}, assumendo per gli stati di natura la distribuzione con $p_1 = \frac{3}{4}$ e $p_2 = \frac{1}{4}$.

2. (a) Determinare gli insiemi S_{Δ^+}, S_{B^+} e S_B e rappresentarli graficamente.
   (b) Determinare l'insieme delle decisioni di S_Δ equivalenti in K_m (minimax) alla decisione $P = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ e rappresentarlo geometricamente [determinare e rappresentare i punti che delimitano l'insieme].

Soluzione

(1a) S_Δ si trova nel primo quadrante ed è limitato (inferiormente) dal ramo di iperbole $y = \frac{1}{x}$ del primo quadrante e dalle rette $x = 2$ e $y = 2$. La rappresentazione grafica è immediata.

(1b) $P_m = (1, 1)$ (intersezione di $y = \frac{1}{x}$ con la bisettrice $y = x$) e quindi (qualunque sia la distribuzione a priori utilizzata), K_{va} in tale punto è uguale a 1.

(2a) $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = S_B =$ arco AD estremi inclusi. La rappresentazione grafica è immediata.

(2b) L'insieme di equivalenza richiesto è dato da $\overline{FH} \cup \overline{FG}$, con $F = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $G = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$. La rappresentazione grafica è immediata.