**1.** Studiare la funzione

$$f(x) = x\frac{1+6\log|x|}{\log|x|},$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Dire se è possibile prolungare $f$ in $x = 0$ in modo che risulti continua/derivabile in tale punto. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

## Dominio e simmetrie

$\text{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$f$ è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x>0$ $\Rightarrow$ togliamo il modulo.

## Continuità e limiti

$f$ è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{1+6\log x}{\log x}}}_{\to 6} = 0.$$ Per simmetria anche $\lim_{x\to0^-} f(x)=0$, quindi

$f$ è estendibile in modo continuo nell'origine ponendo $f(0)=0$.

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm} \underbrace{x}_{\to 1}\frac{\overbrace{1+6\log x}^{\to 1}}{\underbrace{\log x}_{\to 0^\pm}} = \pm\infty.$$ La retta $x=1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty}\underbrace{\boxed{\frac{1+6\log x}{\log x}}}_{\to 6} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+6\log x}{\log x} = 6$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-6x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$ quindi $f$ non ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

## Derivata prima, monotonia

$f$ è derivabile nel suo dominio.

$$f'(x) = \left(x\left(\frac{1}{\log x}+6\right)\right)' = \frac{1}{\log x}+6-\frac{\cancel{x}\,1}{\log^2 x\cdot\cancel{x}} = \frac{6\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x}$$

$$f'(x)=0 \iff 6\log^2 x+\log x-1=0 \iff \log x=\frac{-1\pm 5}{12}= \begin{cases} -1/2 \\ 1/3 \end{cases} \iff \left(x=\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \vee \left(x=\sqrt[3]{e}\right)$$

$$f'(x)>0 \iff 6\log^2 x+\log x-1>0 \iff \left(\log x<-\frac{1}{2}\right) \vee \left(\log x>\frac{1}{3}\right) \iff$$

$$\iff \left(0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \vee \left(x>\sqrt[3]{e}\right)$$

$$f'(x)<0 \iff \left(\frac{1}{\sqrt{e}}<x<1\right) \vee \left(1<x<\sqrt[3]{e}\right).$$

$f$ è strettamente crescente in $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ e in $\left[\sqrt[3]{e},+\infty\right)$

$f$ è strett. decrescente in $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},1\right)$ e in $\left(1,\sqrt[3]{e}\right]$

$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ è punto di massimo locale stretto

$x=\sqrt[3]{e}$ è punto di minimo locale stretto.

Si osservi che $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=6$. Quindi, se si estendesse $f$ in $x=0$ ponendo $f(0)=0$, si avrebbe $f'_+(0)=6$, e per simmetria $f'_-(0)=6$. Quindi tale estensione sarebbe derivabile in $x=0$, con $f'(0)=6$.

**Derivata seconda, convessità** $f$ è derivabile due volte nel suo dominio

$$f''(x)=\left(6+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log^2 x}\right)'=-\frac{1}{x\log^2 x}+\frac{2}{x\log^3 x}=\frac{2-\log x}{x\log^3 x}$$

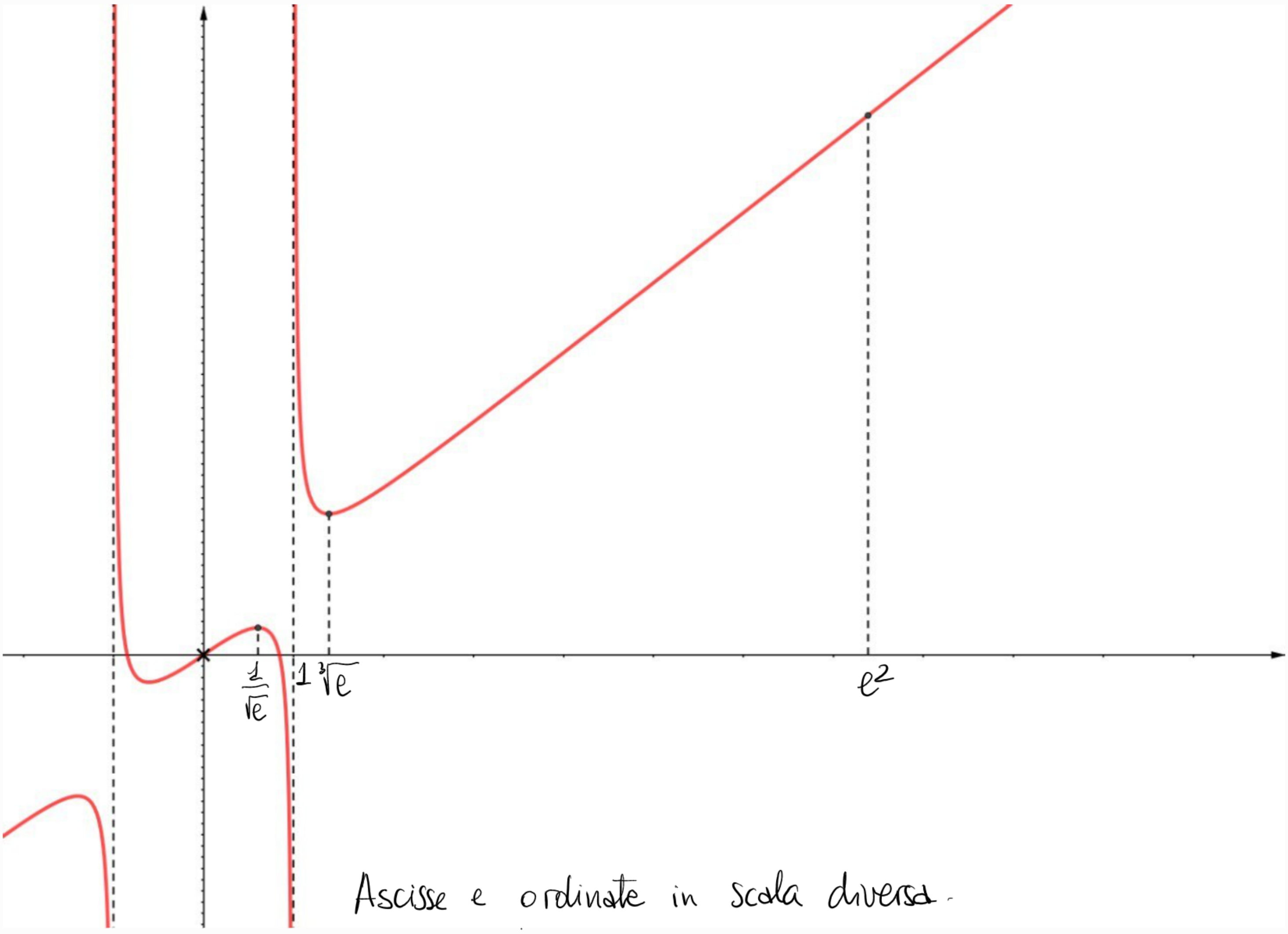
$$f''(x)=0 \iff \log x= \iff x=e^2$$

$$f''(x)>0 \iff \frac{2-\log x}{\log^3 x}>0 \iff 0<\log x<2 \iff 1<x<e^2$$

$$f''(x)<0 \iff (0<x<1) \vee (x>e^2)$$

$f$ è strett. convessa in $(1,e^2]$, strett. concava in $(0,1)$ e in $[e^2,+\infty)$

$x=e^2$ è punto di flesso.




Ascisse e ordinate in scala diversa.

**2.**

a) Risolvere l'equazione

$$|z-2| = |\overline{z}+i|,$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

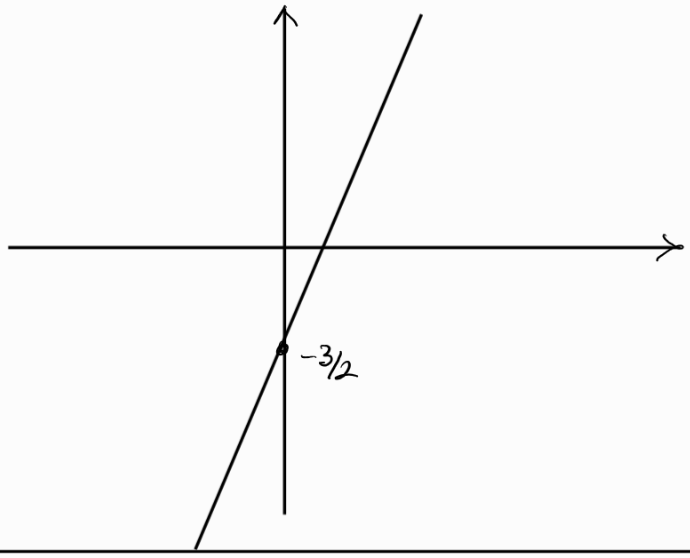
b) Trovare le radici quarte di $(\sqrt{3}-i)^4$ e disegnarle nel piano complesso.

a) Posto $z = x+iy$ $(x,y \in \mathbb{R})$, l'eq^ne diventa

$$|x-2+iy| = |x+(1-y)i| \iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(1-y)^2}$$

$$\iff \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+1-2y+\cancel{y^2} \iff y = 2x-\frac{3}{2}$$

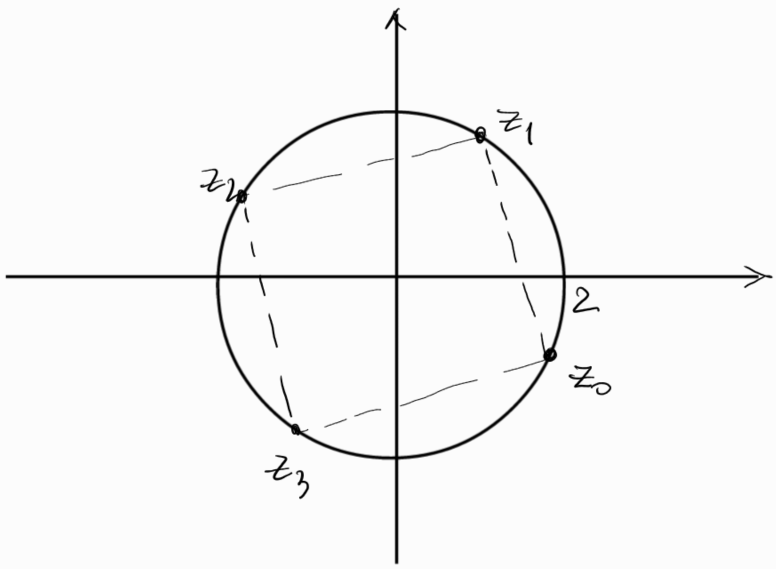
Quindi le soluzioni sono tutti i punti della retta $x+\left(2x-\frac{3}{2}\right)i$ $(x \in \mathbb{R})$




b) $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3}-i)^4 = 16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$,

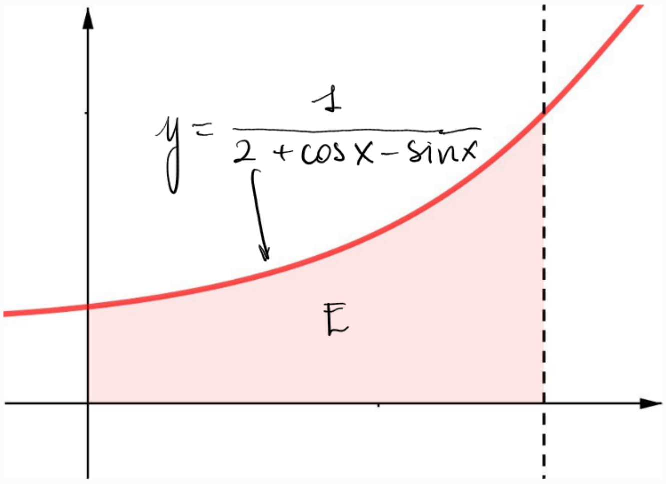
e le radici quarte di $(\sqrt{3}-i)^4$ valgono $z_k = 2e^{i\theta_k}$, $\theta_k = -\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$, $k=0,1,2,3$

cioè
$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$$
$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\sqrt{3}\,i$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}+i$$
$$z_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1-\sqrt{3}\,i$$



**3.** Calcolare l'area della regione limitata del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dalla retta $x = \pi/2$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x - \sin x}.$$




$f(x)$ è continua, limitata e positiva.

$$\text{Area}(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x - \sin x} =$$

sost. $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{t^2-2t+3}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{(t-1)^2+2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**4.** Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+3x}-x^2\right)^{1/\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arctg} x)^3-\sinh(x^3)}{x^\alpha}\ (\alpha>0).$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+3x}-x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left(1^{\pm\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\left(\sqrt{1+3x}-x^2\right)}{\sin x}}$$

D'altra parte $\dfrac{\log(\overbrace{\sqrt{1+3x}-x^2}^{=\frac{3}{2}x+o(x) \text{ per } x\to 0})}{\sin x} = \dfrac{\log\left(1+\frac{3}{2}x+o(x)\right)}{\sin x} \sim \dfrac{3}{2}\dfrac{x}{\sin x} \to \dfrac{3}{2}$

Quindi il limite vale $e^{3/2}$.

---

Per $x\to 0^+$ si ha

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arctg} x)^3 = \left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^3 = x^3 - x^5 + o(x^5)$$

$$\sinh x^3 = x^3 + \frac{x^9}{6} + o(x^9) = x^3 + o(x^5)$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arctg} x)^3 - \sinh x^3 = -x^5 + o(x^5)$$

Quindi il limite vale $\begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha<5 \\ -1 & \text{se} \quad \alpha=5 \\ -\infty & \text{se} \quad \alpha>5 \end{cases}$

**5.** Al variare dei parametri reali $\alpha$ e $x$, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^3 - k^3\cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)\right)\ (\alpha > 0); \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^3 - k^3\cos\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)(x^3-1)^k.$$

Poiché $a_k := k^3 - k^3\cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) = k^3\left(1-\cos\frac{1}{k^\alpha}\right)$,

la serie è a termini positivi

Si ha

$$k^3\underbrace{\left(1-\cos\frac{1}{k^\alpha}\right)}_{\sim \frac{1}{2k^{2\alpha}}} \sim \frac{k^3}{2k^{2\alpha}} = \frac{1}{2k^{2\alpha-3}},$$ confrontando con la

serie armonica generalizzata, la serie converge se $2\alpha - 3 > 1$,

cioè $\alpha > 2$, diverge a $+\infty$ altrimenti

Risultato: la serie $\begin{cases} \text{converge per } \alpha > 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ per } 0 < \alpha \leq 2 \end{cases}$

---

Ponendo $x^3 - 1 = y$, la serie diventa una serie di potenze.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^3\left(1-\cos\frac{1}{k^2}\right)}_{b_k} y^k$$

Calcolo il raggio di convergenza: poiché $b_k \sim \frac{k^3}{2k^4} = \frac{1}{2k}$, si ha

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{b_k}{b_{k+1}} = 1.$$

$$-1 < x^3 - 1 < 1$$

Quindi la serie converge per $|y| < 1$, che corrisponde a $0 < x < \sqrt[3]{2}$,

e non converge per $|y| > 1$, che corrisponde a $(x<0) \vee (x > \sqrt[3]{2})$.

Per $y = 1$ (cioè $x = \sqrt[3]{2}$) la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, che diverge per quanto già visto per la serie precedente.

Per $y = -1$ (cioè $x = 0$), la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$.

Proviamo ad applicare il criterio di Leibniz: $b_k \to 0$, bisogna controllare che $b_k = k^3\left(1-\cos\frac{1}{k^2}\right)$ sia def$^{te}$ decrescente.

Posto $f(x) = x^3\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right)$, si ha

$$f'(x) = 3x^2\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right) - x^3 \sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{x^3} =$$

$$= \underbrace{3x^2\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right)}_{\sim \frac{3}{2x^2}} \underbrace{- 2\sin\frac{1}{x^2}}_{\sim -\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{x^2}\Bigg(\underbrace{3x^4\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right)}_{\downarrow \, 3/2} \underbrace{- 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}_{\downarrow \, -2}\Bigg) \sim -\frac{1}{2x^2}$$

Quindi $f' < 0$ def$^{te}$ per $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ $b_k$ def$^{te}$ decrescente

$\Rightarrow$ la serie converge.

In definitiva la serie converge se e solo se $0 \leq x < \sqrt[3]{2}$.