1. Studiare la funzione
$$f(x) = |x|\frac{1+2\log|x|}{\log|x|},$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Dire se è possibile prolungare f in $x = 0$ in modo che risulti continua/derivabile in tale punto. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio e simmetrie

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0,\pm 1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x>0$ $\Rightarrow$ togliamo il modulo.

Continuità e limiti

f è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{1+2\log x}{\log x}}}_{\to 2} = 0.$$ Per simmetria anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, quindi

f è estendibile in modo continuo nell'origine ponendo $f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \underbrace{x}_{\to 1} \frac{\overbrace{1+2\log x}^{\to 1}}{\underbrace{\log x}_{\to 0^\pm}} = \pm\infty.$$ La retta $x=1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{1+2\log x}{\log x}}}_{\to 2} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+2\log x}{\log x} = 2.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$ quindi f non ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Derivata prima, monotonia

f è derivabile nel suo dominio.

$$f'(x) = \left(x\left(\frac{1}{\log x}+2\right)\right)' = \frac{1}{\log x}+2-\frac{\cancel{x}^{\,1}}{\log^2 x\cdot \cancel{x}} = \frac{2\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x}$$

$$f'(x)=0 \iff 2\log^2 x+\log x-1=0 \iff \log x=\frac{-1\pm 3}{4}= \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases} \iff \left(x=\frac{1}{e}\right) \vee \left(x=\sqrt{e}\right)$$

$$f'(x)>0 \iff 2\log^2 x+\log x-1>0 \iff (\log x<-1) \vee \left(\log x>\frac{1}{2}\right) \iff$$

$$\iff \left(0<x<\frac{1}{e}\right) \vee \left(x>\sqrt{e}\right)$$

$$f'(x)<0 \iff \left(\frac{1}{e}<x<1\right) \vee \left(1<x<\sqrt{e}\right).$$

f è strettamente crescente in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ e in $\left[\sqrt{e}, +\infty\right)$

f è strett. decrescente in $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ e in $\left(1, \sqrt{e}\right]$

$x=\frac{1}{e}$ è punto di massimo locale stretto

$x=\sqrt{e}$ è punto di minimo locale stretto.

Si osservi che $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=2$. Quindi, se si estendesse f in $x=0$ ponendo $f(0)=0$, si avrebbe $f'_+(0)=2$, e per simmetria $f'_-(0)=-2$. Quindi tale estensione non sarebbe derivabile in $x=0$ (punto angoloso).

Derivata seconda, convessità f è derivabile due volte nel suo dominio

$$f''(x)=\left(2+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log^2 x}\right)'=-\frac{1}{x\log^2 x}+\frac{2}{x\log^3 x}=\frac{2-\log x}{x\log^3 x}$$

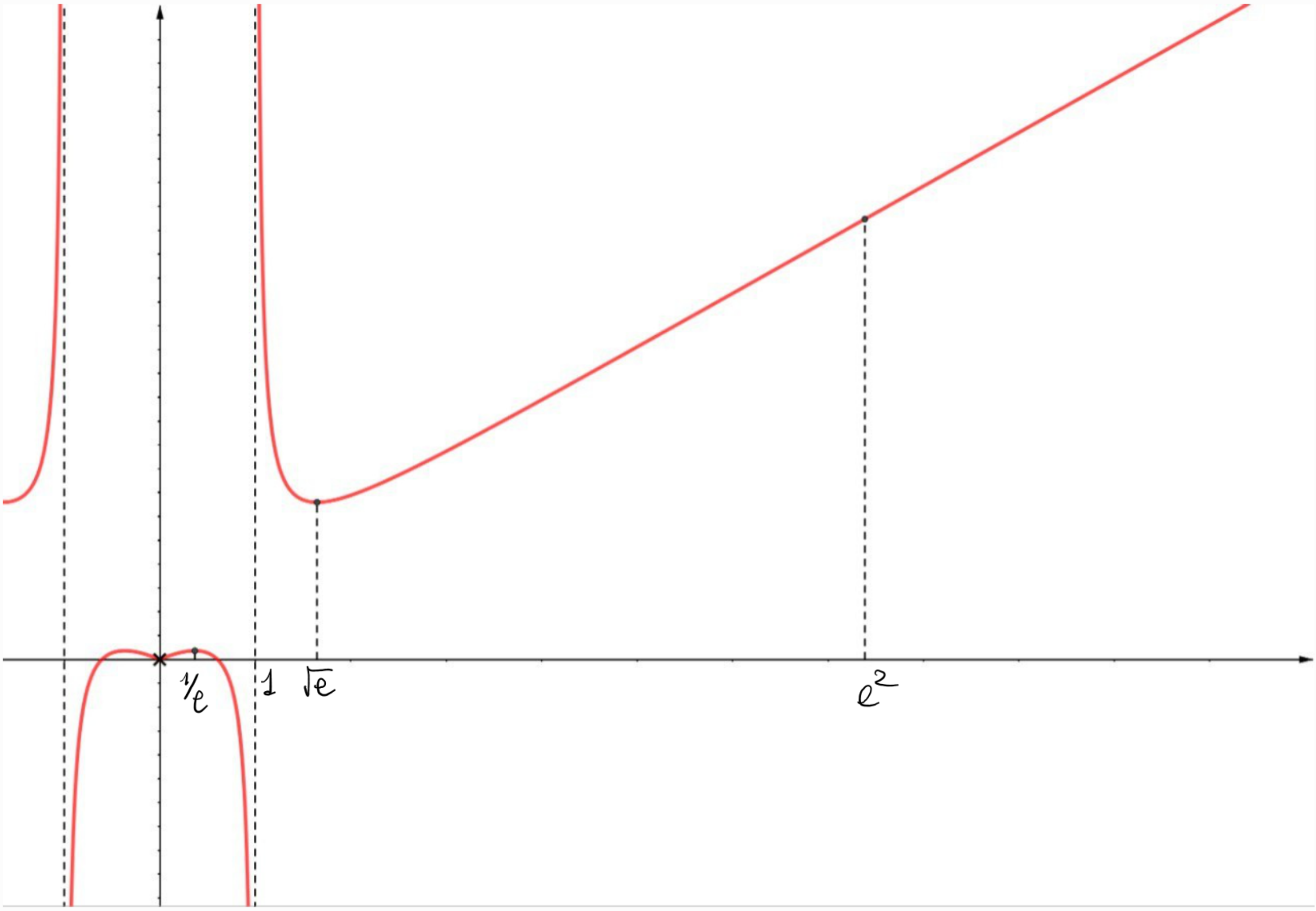
$$f''(x)=0 \iff \log x=2 \iff x=e^2$$

$$f''(x)>0 \iff \frac{2-\log x}{\log^3 x}>0 \iff 0<\log x<2 \iff 1<x<e^2$$

$$f''(x)<0 \iff (0<x<1) \vee (x>e^2)$$

f è strett. convessa in $(1, e^2]$, strett. concava in $(0,1)$ e in $[e^2, +\infty)$

$x=e^2$ è punto di flesso.



Ascisse e ordinate in scale differenti.

2.

a) Risolvere l'equazione

$$|z - i| = |\overline{z} + 2|\,,$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

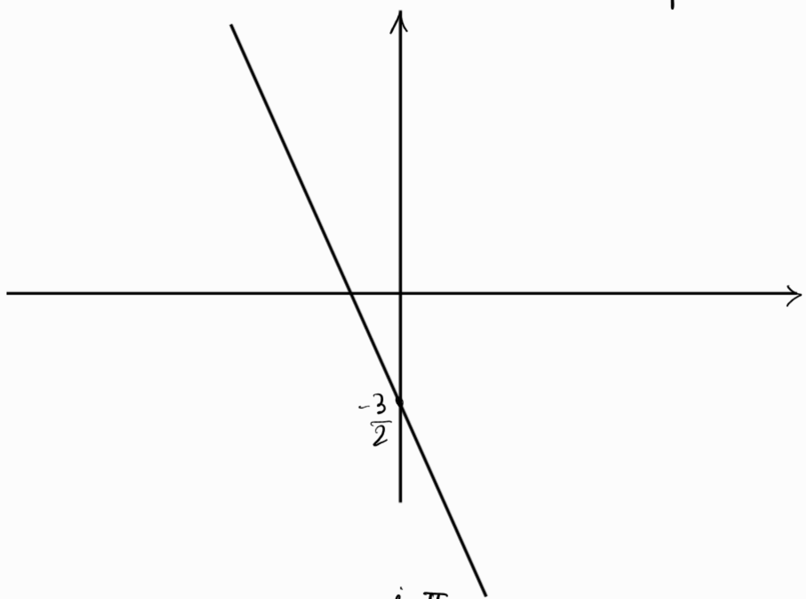
b) Trovare le radici quarte di $(\sqrt{3} + i)^4$ e disegnarle nel piano complesso.

a) Posto $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, l'eq^{ne} diventa

$$|x + i(y-1)| = |x + 2 - iy| \iff \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\iff \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} \iff y = -2x - \frac{3}{2}$$

Quindi le soluzioni sono tutti i punti della retta $x - \left(2x + \frac{3}{2}\right)i \quad (x \in \mathbb{R})$



b) $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^4 = 16\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$,

e le radici quarte di $(\sqrt{3}+i)^4$ valgono $z_k = 2e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$

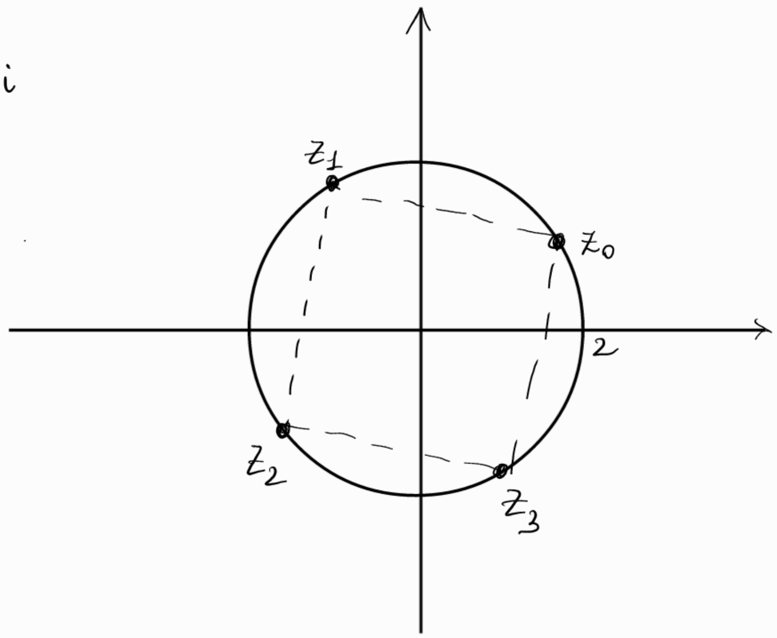
cioè

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$$

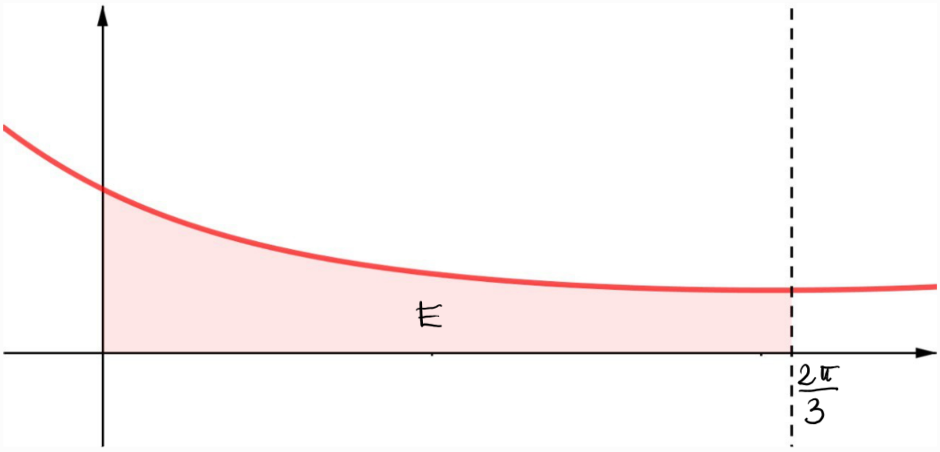
$$z_3 = 2e^{i\frac{5}{3}\pi} = 1 - \sqrt{3}i$$



3. Calcolare l'area della regione limitata del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dalla retta $x = 2\pi/3$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3 - \cos x + 2\sin x}.$$

E' ovvio che la funzione f è continua, positiva e limitata in $\mathbb{R}$.
Quindi



$$\text{Area}(E) = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{3 - \cos x + 2\sin x} =$$

sost. $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0$

$x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{4t^2+4t+2} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{(2t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(2t+1)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+2x^2}\right)^{1/\operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sinh x)^3-\operatorname{arctg}(x^3)}{x^\alpha}\ (\alpha>0).$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+2x^2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left(1^{\pm\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+2x^2}\right)}{\operatorname{tg} x}}$$

$1+x^2+o(x^2)$ per $x\to 0$

D'altra parte $\dfrac{\log\left(x+\overbrace{\sqrt{1+2x^2}}^{}\right)}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\log\left(1+x+o(x)\right)}{\operatorname{tg} x} \sim \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} \to 1$

Quindi il limite vale e.

Per $x\to 0^+$ si ha

$$\sinh x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$$\Rightarrow (\sinh x)^3 = \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3 = x^3+\frac{x^5}{2}+o(x^5)$$

$$\operatorname{arctg} x^3 = x^3-\frac{x^9}{3}+o(x^9) = x^3+o(x^5)$$

$$\Rightarrow (\sinh x)^3-\operatorname{arctg} x^3 = \frac{x^5}{2}+o(x^5)$$

Quindi il limite vale $\begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<5 \\ 1/2 & \text{se } \alpha=5 \\ +\infty & \text{se } \alpha>5 \end{cases}$

5. Al variare dei parametri reali α e x, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 e^{1/k^\alpha} - k^2\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 e^{1/k^3} - k^2\right)(\log x)^k .$$

Poiché $a_k := k^2 e^{1/k^\alpha} - k^2 = k^2\left(e^{1/k^\alpha} - 1\right)$,

la serie è a termini positivi, e per $\alpha \le 0$ il termine non è infinitesimo, quindi la serie diverge a $+\infty$.

Per $\alpha > 0$ si ha

$$k^2\left(e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1\right) \sim \frac{k^2}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-2}},$$

confrontando con la serie armonica generalizzata, la serie converge se $\alpha > 3$, diverge a $+\infty$ altrimenti.

Risultato: la serie $\begin{cases} \text{converge per } \alpha > 3 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ per } \alpha \le 3. \end{cases}$

La serie è definita per $x > 0$. Ponendo $\log x = y$, diventa una serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2\left(e^{1/k^3} - 1\right)}_{b_k} y^k .$$

Calcolo il raggio di convergenza: poiché $b_k \sim \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$, si ha

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{b_k}{b_{k+1}} = 1.$$

Quindi la serie converge per $|y| < 1$, cioè $\frac{1}{e} < x < e$,

e non converge per $|y| > 1$, cioè $\left(0 < x < \frac{1}{e}\right) \vee (x > e)$.

Per $y = 1$ (cioè $x = e$) la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, che diverge per quanto già visto per la precedente serie.

Per $y = -1$ (cioè $x = \frac{1}{e}$), la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$.

Proviamo ad applicare il criterio di Leibniz: $b_k \to 0$, devo controllare che $b_k = k^2\left(e^{1/k^3} - 1\right)$ sia def^{te} decrescente.

Posto $f(x) = x^2\left(e^{1/x^3} - 1\right)$, si ha

$$f'(x) = 2x\left(e^{1/x^3} - 1\right) + x^2 e^{1/x^3}\left(-\frac{3}{x^4}\right) =$$

$$= \underbrace{2x\left(e^{1/x^3} - 1\right)}_{\sim \frac{2}{x^2}} - \underbrace{3\,\frac{e^{1/x^3}}{x^2}}_{\sim -3/x^2} = \frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{2x^3\left(e^{1/x^3} - 1\right)}_{\downarrow\, 2} - \underbrace{3e^{1/x^2}}_{\downarrow\, -3}\Big) \sim -\frac{1}{x^2}$$

Quindi $f' < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ b_k def^{te} decrescente

$\Rightarrow$ la serie converge.

In definitiva la serie converge se e solo se $\frac{1}{e} \leq x < e$.