1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) - \frac{x}{2},$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

f è la somma di una funzione lineare e di una funzione periodica di periodo 2π: si ha $f(x+2\pi) = f(x) - \pi \implies$ basta studiarla in un intervallo di ampiezza 2π, per esempio $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

Continuità e limiti significativi $\quad f$ è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\pi\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\pi\right)^+} \Bigg(\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)}_{\to -\frac{\pi}{2}} \underbrace{- \frac{x}{2}}_{\to +\frac{3\pi}{4}} \Bigg) = \frac{\pi}{4}$$

in quanto $\quad \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \longrightarrow \left(\dfrac{2}{0^-}\right) = -\infty$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \Bigg(\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}} \underbrace{- \frac{x}{2}}_{\to -\frac{\pi}{4}} \Bigg) = \frac{\pi}{4}$$

in quanto $\quad \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \longrightarrow \left(\dfrac{2}{0^+}\right) = +\infty$

Questi limiti in realtà diventano ovvi una volta studiata f!

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \Bigg(\underbrace{\operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1-\sin x}}_{\text{limitata}} \underbrace{- \frac{x}{2}}_{\to \mp\infty} \Bigg) = \mp\infty$$

Ma f non ammette asintoti obliqui, essendo

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \text{funzione periodica non costante.}$$

Derivata prima f è derivabile nel suo dominio, e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)^2} \cdot \frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{2-2\sin x} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

Quindi f è costante in ogni intervallo in cui è definita.

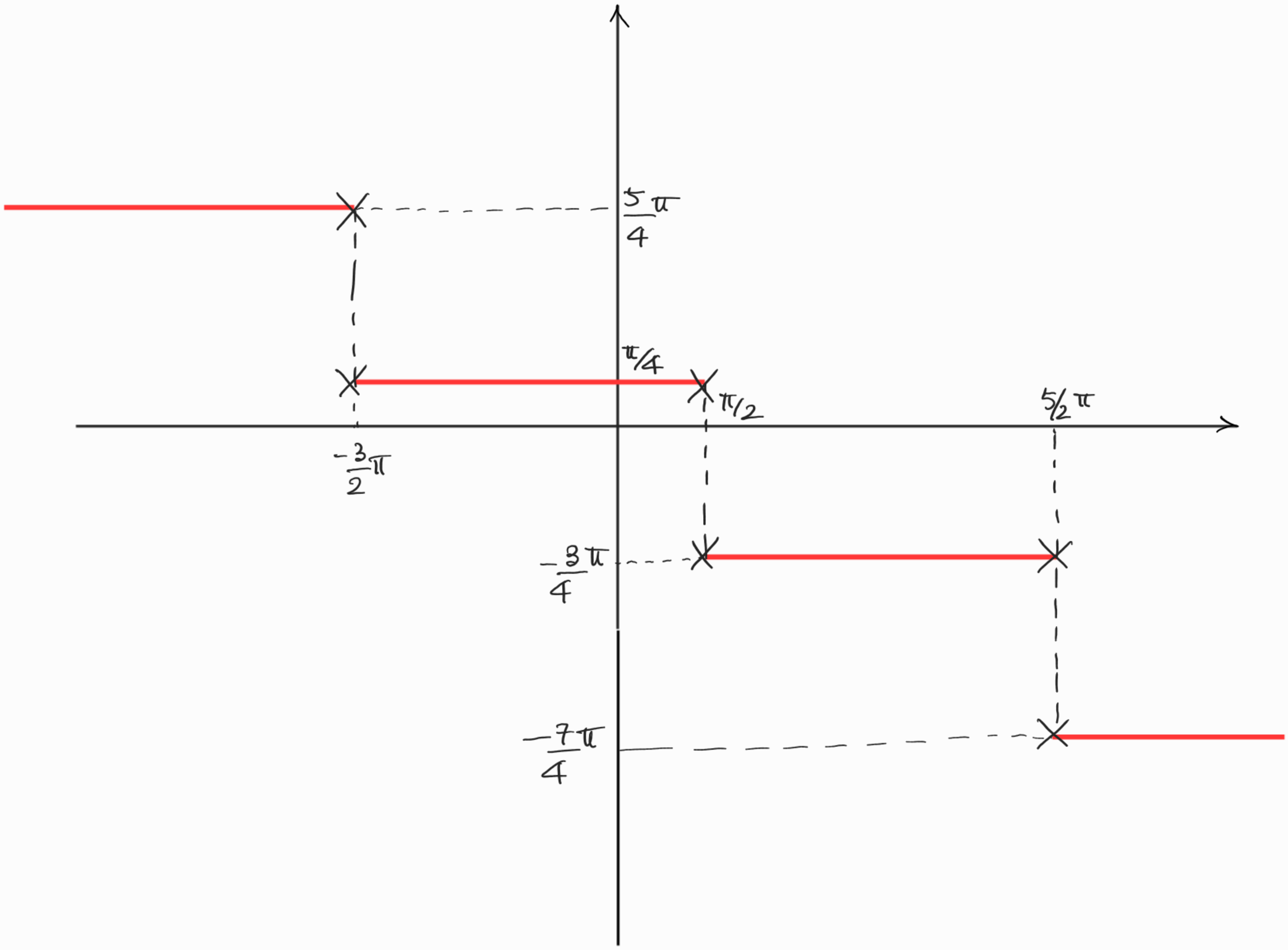
In particolare in $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad f(x) = f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

Tutti i punti del dominio di f sono pti di max. relativo e di min. relativo.

Ovviamente $f''(x) = 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$.

f è concava e convessa in ogni intervallo in cui è definita.

Tutti i punti di dom f sono punti di flesso.



2. Trovare tutti i numeri complessi z e w che verificano

$$|\bar{z}-2|-|z|^2-2\mathrm{Im}\, z = 3i\,, \qquad \frac{w^3}{i}\in\mathbb{R}\,.$$

1) Nella prima equazione, a sinistra c'è un numero reale, che non può mai essere uguale a $3i$. Pertanto la prima equazione non ammette soluzioni.

2) La seconda condizione si affronta meglio in coordinate polari:

se $w=|w|e^{i\varphi}$, allora $\frac{w^3}{i}=|w|^3 e^{i(3\varphi-\frac{\pi}{2})}$.

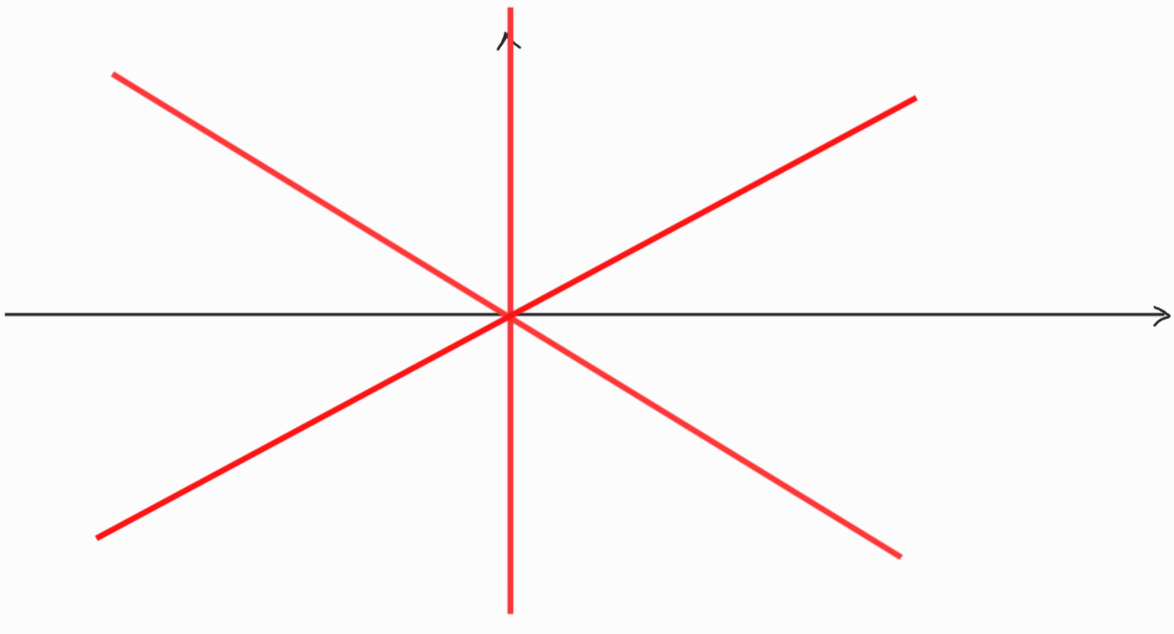
Imporre che quest'ultimo sia un numero reale equivale a imporre

$$3\varphi-\frac{\pi}{2}=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \qquad (\text{oppure } w=0),$$

cioè $\varphi=\varphi_k=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$. Qui $k\in\mathbb{Z}$, ma in realtà basta prendere $k=0,1,2,3,4,5$, perché poi si riottengono gli stessi valori traslati di multipli di 2π.

Quindi si ottiene $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\frac{5}{6}\pi$, $\varphi_3=\frac{7}{6}\pi$, $\varphi_4=\frac{3}{2}\pi$, $\varphi_5=\frac{11}{6}\pi$

In conclusione, le soluzioni della seconda equazione sono tre rette come in figura:



3. Calcolare

$$\int \operatorname{arctg}(4\sqrt{x}-1)\,dx$$

Sostituzione $\quad 4\sqrt{x}-1=t \Rightarrow x=\dfrac{(t+1)^2}{16} \Rightarrow dx=\dfrac{1}{8}(t+1)dt$

$$\int \operatorname{arctg}(4\sqrt{x}-1) = \frac{1}{8}\int (t+1)\operatorname{arctg} t\,dt = \text{[per parti]}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(t+1)^2\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{(t+1)^2}{1+t^2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left((t+1)^2\operatorname{arctg} t - \int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left((t+1)^2\operatorname{arctg} t - t - \log(1+t^2)\right) + c$$

$$= x\operatorname{arctg}(4\sqrt{x}-1) - \frac{1}{16}(4\sqrt{x}-1) - \frac{1}{16}\log\left(1+(4\sqrt{x}-1)^2\right) + c$$

$$= x\operatorname{arctg}(4\sqrt{x}-1) - \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{1}{16}\log(16x-8\sqrt{x}+2) + c_1$$

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} |\cos x|^{2x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+\cos x)}{x^\alpha} \ (\alpha > 0), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^3)-(\sin x)^3}{(\cos(x^3)-(\cos x)^3)x^\beta} \ (\beta \in \mathbb{R}).$$

a) Poiché $|\cos x|$ oscilla tra 0 e 1, $|\cos x|^{2x}$ oscilla infinite volte tra $0^{2x}=0$ e $1^{2x}=1$. Il limite non esiste.

Si può anche vedere con il teorema ponte. Infatti, prese le succ^{ni}

$$a_n = 2\pi n \to +\infty \quad \text{e} \quad b_n = \frac{\pi}{2}+\pi n \to +\infty,$$

si ha

$$|\cos a_n|^{2a_n} = 1^{4\pi n} = 1 \to 1$$

$$|\cos b_n|^{2b_n} = 0^{\pi+2\pi n} = 0 \to 0.$$

b) Per $x\to 0^+$

$$\log(x+\cos x) = \log(1+\underbrace{(\cos x - 1 + x)}_{\to 0}) \sim \cos x - 1 + x =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + x = x + o(x) \sim x$$

Quindi il limite vale $\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

c) per $x \to 0^+$ si ha

$$\sin(x^3) - (\sin x)^3 =$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9) - \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3}_{= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)} =$$

$$= \frac{x^5}{2} + o(x^5) \sim \frac{x^5}{2}.$$

Invece $\cos(x^3) - (\cos x)^3 = 1 - \dfrac{x^6}{2} + o(x^6) - \underbrace{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3}_{1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)} =$

$$= +\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$$

Quindi $\dfrac{\sin(x^3) - (\sin x)^3}{(\cos(x^3) - (\cos x)^3)\, x^\beta} \sim \dfrac{\frac{1}{2}x^5}{\frac{3}{2}x^2 x^\beta} = \dfrac{1}{3}\, x^{3-\beta}$

e il limite vale $\begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 3 \\ 1/3 & \text{se } \beta = 3 \\ +\infty & \text{se } \beta > 3 \end{cases}$.

5. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \big(\log(1+3|x|)\big)^{\alpha} \log(x^4) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $x=0$ se e solo se $\lim_{x \to 0} \left(\log(1+3|x|)\right)^{\alpha} \log(x^4) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left(\log(1+3|x|)\right)^{\alpha} \log(x^4) = \lim_{x \to 0} (3|x|)^{\alpha} \cdot 4 \log|x| = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

f è derivabile se e solo se esiste finito

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\log(1+3|x|)\right)^{\alpha} \log(x^4)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(3|x|)^{\alpha} \cdot 4 \log|x|}{x}$$

Questo limite esiste finito se e solo se $\alpha > 1$ (e in tal caso vale zero).
Per $\alpha \leq 1$ non esiste (vale $-\infty$ per $x \to 0^+$, $+\infty$ per $x \to 0^-$).