1. Studiare la funzione
$$f(x) = x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right),$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f è la somma di una funzione lineare e di una funzione periodica di periodo 2π: si ha $f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$. $\Longrightarrow$ Basta studiarla in un intervallo di ampiezza 2π, per esempio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Continuità e limiti significativi: f è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}\left(\underbrace{x}_{\to -\frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}_{\to 0}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

essendo
$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \to \left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\underbrace{x}_{\to \frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \to \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\left(\underbrace{x}_{\to \frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\operatorname{arctg}\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}}}_{\to -\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

$$\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \to \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^-}\left(x - 2\operatorname{arctg}\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

$$\boxed{\frac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \to 0$$

Tutti questi limiti in realtà sono ovvi una volta studiata f'.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\Big(\underbrace{x}_{\pm\infty} - \underbrace{2\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{1+\sin x}{\cos x}\Big)}_{\text{limitata}}\Big) = \pm\infty$$

Ma f non ammette asintoti obliqui, essendo

$f(x) = x +$ funzione periodica non costante.

Derivata prima. f è derivabile nel suo dominio, e si ha

$$f'(x) = 1 - 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2}\cdot\frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 - \frac{2(1+\sin x)}{2+2\sin x} = 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}\, f.$$

Quindi f è costante in ogni intervallo in cui è definita.

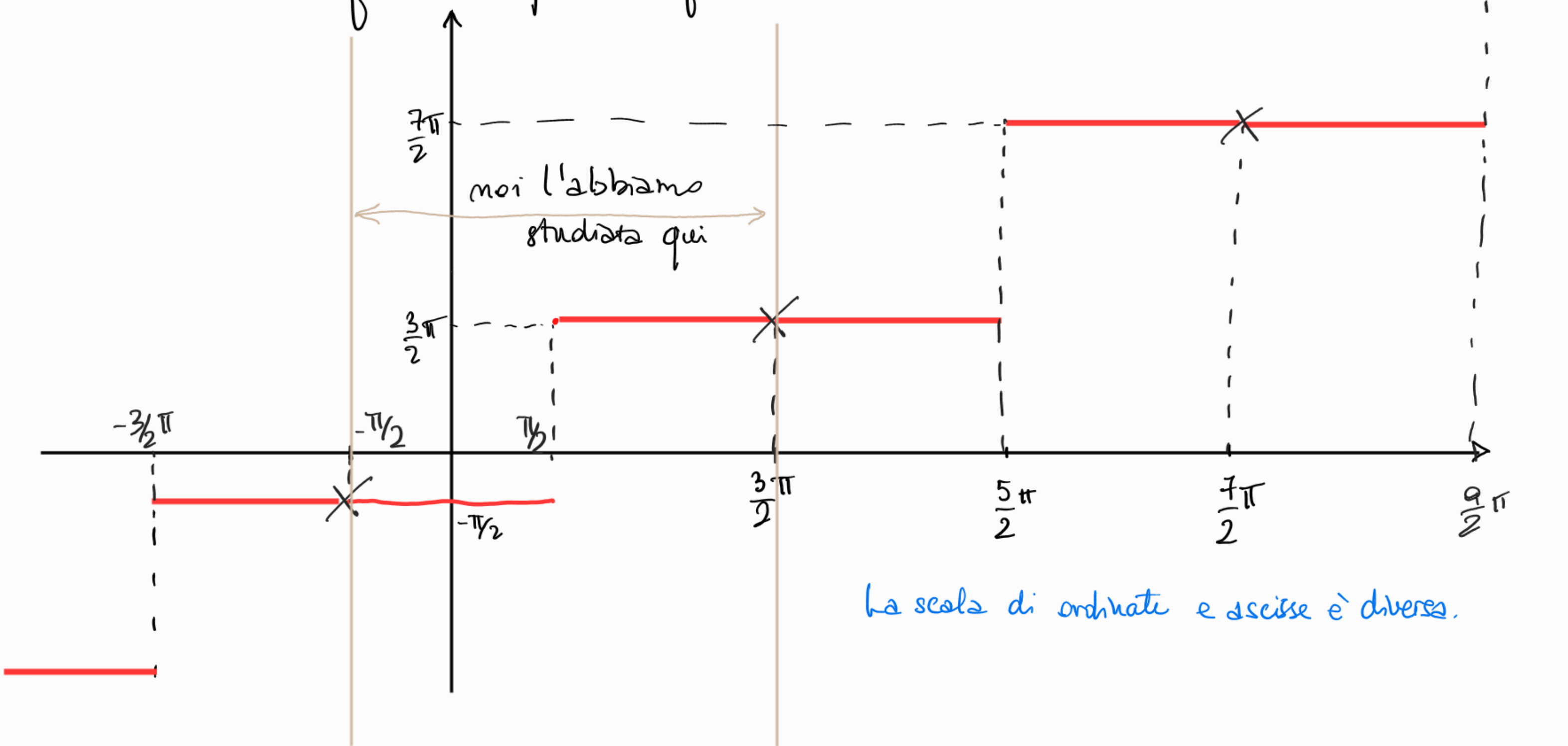
In particolare in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = f(0) = -2\,\mathrm{arctg}\,1 = -\frac{\pi}{2}$

in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f(x) = f(\pi) = \pi - 2\,\mathrm{arctg}(-1) = \frac{3}{2}\pi$.

Tutti i punti del dominio di f sono pti di max. relativo e di min. relativo.

Ovviamente $f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}\, f$.

f è concava e convessa in ogni intervallo in cui è definita. Tutti i punti di dom f sono pti di flesso.



La scala di ordinate e ascisse è diversa.

2. Trovare tutti i numeri complessi z e w che verificano

$$3|z|^2 - |\overline{z} - 1| + 2\mathrm{Re}\, z = 4i\,, \qquad iw^3 \in \mathbb{R}\,.$$

1) Nella prima equazione, a sinistra c'è un numero reale, che non può mai essere uguale a $4i$. Pertanto la prima equazione non ammette soluzioni.

2) La seconda condizione si affronta meglio in coordinate polari: se $w = |w| e^{i\varphi}$, allora $i w^3 = |w|^3 e^{i\left(3\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$.

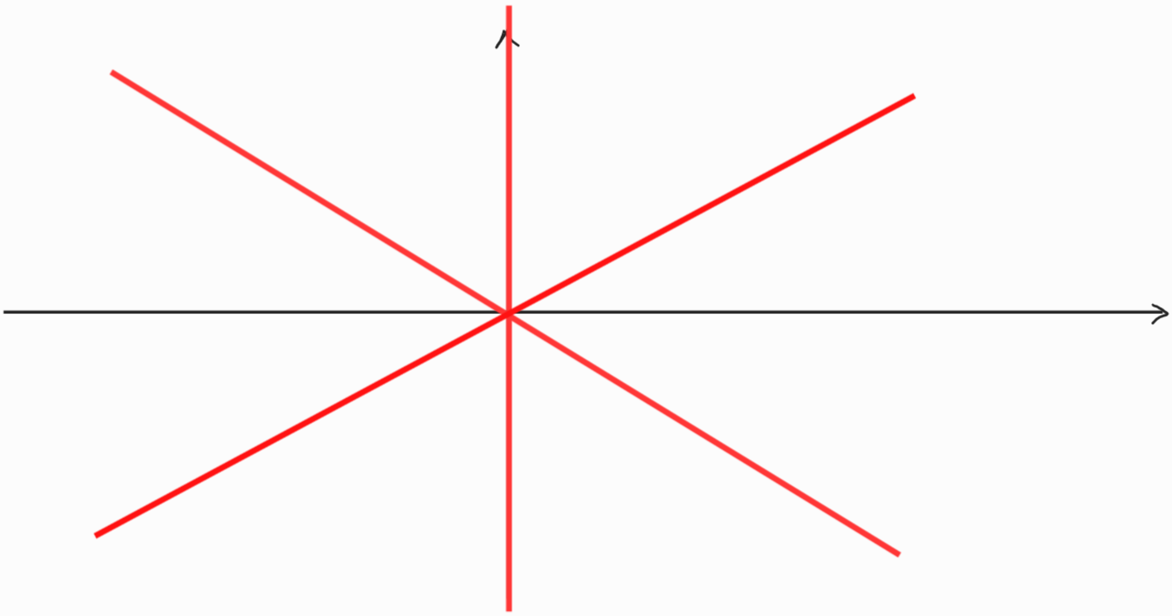
Imporre che quest'ultimo sia un numero reale equivale a imporre

$$3\varphi + \frac{\pi}{2} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (\text{oppure } w = 0),$$

cioè $\varphi = \varphi_k = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$. Qui $k \in \mathbb{Z}$, ma in realtà basta prendere $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, perché poi si riottengono gli stessi valori traslati di multipli di 2π.

Quindi si ottiene $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \frac{5}{6}\pi$, $\varphi_4 = \frac{7}{6}\pi$, $\varphi_5 = \frac{3}{2}\pi$.

In conclusione, le soluzioni della seconda equazione sono tre rette come in figura:



3. Calcolare

$$\int \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}+1)\,dx$$

Sostituzione $\quad 3\sqrt{x}+1=t \implies x=\frac{(t-1)^2}{9} \Rightarrow dx=\frac{2}{9}(t-1)dt$

$$\int \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}+1) = \frac{2}{9}\int (t-1)\operatorname{arctg} t\, dt = \text{[per parti]}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{9}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(t-1)^2\operatorname{arctg} t - \frac{1}{\cancel{2}}\int \frac{(t-1)^2}{1+t^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left((t-1)^2\operatorname{arctg} t - \int\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left((t-1)^2\operatorname{arctg} t - t + \log(1+t^2)\right) + c$$

$$= x\operatorname{arctg}(3\sqrt{x}+1) - \frac{1}{9}(3\sqrt{x}+1) + \frac{1}{9}\log\left(1+(3\sqrt{x}+1)^2\right) + c$$

$$= x\operatorname{arctg}(3\sqrt{x}+1) - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{9}\log(9x+6\sqrt{x}+2) + c_1$$

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} |\sin x|^{3x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^2+\cos x)}{x^\alpha} \; (\alpha>0), \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{2x^2} - e^2\right].$$

a) Poiché $|\sin x|$ oscilla tra 0 e 1, $|\sin x|^{3x}$ oscilla infinite volte tra $0^{3x}=0$ e $1^{3x}=1$. Il limite non esiste.

Si può anche vedere con il teorema ponte. Infatti, prese le succ^{ni} $a_n=\pi n \to +\infty$ e $b_n = \frac{\pi}{2}+2\pi n \to +\infty$,

si ha $|\sin a_n|^{3a_n} = 0^{\pi n} \to 0$

$|\sin b_n|^{3b_n} = 1^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 1$.

b) $\log(x^2+\cos x) = \log(1+\underbrace{(\cos x - 1 + x^2)}_{\to 0}) \sim$ (per $x\to 0^+$)

$\sim \cos x - 1 + x^2 \underset{\text{Taylor}}{=} \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{1} + x^2 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sim \frac{x^2}{2}$. per $x \to 0^+$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^2+\cos x)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

c) Per $x \to +\infty$

$$\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{2x^2} - e^2 = e^{2x^2 \log\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right)} - e^2 =$$

[osservato che $2x^2\log\left(1+\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right) \sim 2x^2 \sin\frac{1}{x^2} \to 2$]

$$= e^2\left[e^{\underbrace{2x^2\log\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right)-2}_{\text{l'esponente va a zero}}} - 1\right] \sim e^2\left[2x^2\log\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right) - 2\right]$$

Sfruttando gli sviluppi di Taylor $\quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

si ottiene $\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right) =$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

e quindi

$$e^2\left[2x^2\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-2\right] = e^2\left[\cancel{2} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{2}\right] \sim -\frac{e^2}{x^2}$$

Quindi il limite vale $-e^2$.

5. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{\log|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua in zero se e solo se $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\log|x|} = 0$

D'altra parte $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\log|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^\alpha}{\log|x|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

Quindi f è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha \geq 0$.

Per essere derivabile in zero, deve anche essere continua, quindi limitiamoci ad $\alpha > 0$. Per definizione

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{x \log|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^\alpha}{x \log|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^\alpha} \frac{|x|^{2\alpha}}{x \log|x|}$$

Questo limite esiste finito se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{2}$, e in tal caso vale zero

Se $\alpha < \frac{1}{2}$ il precedente limite non esiste (viene $-\infty$ per $x \to 0^+$, $+\infty$ per $x \to 0^-$).

Quindi f è derivabile nell'origine se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{2}$.