Richiami: test e intervalli (F. De Santis)

Test

1. **Test esatti per valore atteso modello normale**

   [Problema N1 - $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, varianza σ^2 nota] [1]

   Si usa la statistica test

   $$Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta_0)|\theta_0 \sim \mathrm{N}(0,1)$$

   Indicando con u_ϵ quantile di livello ϵ della v.a. $\mathrm{N}(0,1)$ si ottiene

   (a) **One-sided A**
   - $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$
   - Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) > u_{1-\alpha}$
   - $\eta(\theta) = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \theta_0) + u_{1-\alpha}\right)$
   - Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

   (b) **One-sided B**
   - $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$
   - Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) < u_\alpha$
   - $\eta(\theta) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \theta_0) + u_\alpha\right)$
   - Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

   (c) **Two-sided**
   - $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$
   - Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $|Q(\mathbf{z}_n, \theta_0)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
   - $\eta(\theta) = 1 - \left[\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \theta_0) + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \theta_0) - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]$

2. **Problema N3 - Test esatti per varianza modello normale**

   [$X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$, valore atteso μ_0 noto] [2]

   Si usa la statistica test

   $$Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{nS_0^2}{\theta_0} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta_0)|\theta_0 \sim \chi^2_n \qquad \text{e} \qquad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

   Indicando con q_ϵ quantile di livello ϵ della v.a. χ^2_n si ottiene

[1] Problema N2 - Per il caso in cui la varianza è incognita si considera la statistica test

$$Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{S_n} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta_0)|H_0 \sim \mathrm{T}_{n-1} \qquad \text{e} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

I percentili q_ϵ che definiscono le regioni di rifiuto di H_0 sono quindi riferiti alla v.a. T_{n-1}.

[2] Problema N4 - Per il caso in cui il valore atteso è non noto, si usa la statistica test

$$Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{(n-1)S_n^2}{\theta_0} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta_0)|\theta_0 \sim \chi^2_{n-1} \qquad \text{e} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

I percentili q_ϵ che definiscono le regioni di rifiuto di H_0 sono quindi riferiti alla v.a. χ^2_{n-1}.

(a) **One-sided A**

- $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) > q_{1-\alpha}$
- Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

(b) **One-sided B**

- $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) < q_{\alpha}$
- Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

(c) **Two-sided**

- $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza α) $\dashrightarrow$ $Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) < q_{\frac{\alpha}{2}} \quad \vee \quad Q(\mathbf{z}_n, \theta_0) > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

3. **Test asintotici basati su smv (Wald)**[3]

4. Si considera

$$\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{d_{mv}(\mathbf{z}_n) - \theta_0}{sd(\theta_0)}$$

con $sd(\theta_0) = \sqrt{I_n(\theta_0)^{-1}}$

(a) **One-sided A**

- $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza $\approx \alpha$) $\dashrightarrow$ $\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta_0) > u_{1-\alpha}$
- $\widetilde{\eta}(\theta) = 1 - \Phi\left[-\frac{(\theta-\theta_0)}{sd(\theta)} + \frac{sd(\theta_0)}{sd(\theta)} u_{1-\alpha}\right]$
- Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

(b) **One-sided B**

- $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza $\approx \alpha$) $\dashrightarrow$ $\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta_0) < u_{\alpha}$
- $\widetilde{\eta}(\theta) = \Phi\left[-\frac{(\theta-\theta_0)}{sd(\theta)} + \frac{sd(\theta_0)}{sd(\theta)} u_{\alpha}\right]$
- Tutto uguale se $H_0 : \theta = \theta_0$

(c) **Two-sided**

- $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$
- Rifiuto H_0 (ampiezza $\approx \alpha$) $\dashrightarrow$ $|\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta_0)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $\widetilde{\eta}(\theta) = 1 - \left(\Phi\left[-\frac{(\theta-\theta_0)}{sd(\theta)} + \frac{sd(\theta_0)}{sd(\theta)} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] - \Phi\left[-\frac{(\theta-\theta_0)}{sd(\theta)} - \frac{sd(\theta_0)}{sd(\theta)} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)$

[3]Si procede in analogia per test su $\lambda = g(\theta)$, usando la statistica test $\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta_0) = \frac{g(d_{mv}) - g(\theta_0)}{|g'(\theta_0)| sd(\theta_0)}$

Intervalli di confidenza
Consideriamo negli esempi qui di seguito solo gli intervalli *centrali*, ovvero quelli che derivano dagli intervalli pivoltali di tipo a code uguali

1. **IC per valore atteso modello normale**

   $[X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, varianza σ^2 nota$]$

   Si usa la **quantità pivotale**

   $$Q(\mathbf{z}_n, \theta) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta)}{\sigma} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta)|\theta \sim \mathrm{N}(0,1)$$

   Indicando con u_ϵ quantile di livello ϵ della v.a. $\mathrm{N}(0,1)$ si ottiene

   $$C_{1-\alpha} = \overline{X}_n \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. **IC varianza modello normale**

   $[X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$, valore atteso μ_0 noto$]$

   Si usa la quantità pivotale

   $$Q(\mathbf{z}_n, \theta) = \frac{nS_0^2}{\theta} \qquad \text{con} \qquad Q(\mathbf{Z}_n, \theta)|\theta \sim \chi^2_n$$

   Indicando con q_ϵ quantile di livello ϵ della v.a. χ^2_n si ottiene

   $$C_{1-\alpha} = \left[\frac{nS_0^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{nS_0^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

3. **IC asintotici** (modelli regolari)

   Si considera la quantità pivotale asintotica

   $$\widetilde{Q}(\mathbf{z}_n, \theta) = \frac{d_{mv}(\mathbf{z}_n) - \theta}{\widehat{sd(\theta)}}$$

   con $\widehat{sd(\theta)} = \sqrt{I_n(d_{mv})^{-1}}$. Osservando che, $\forall \theta \in \Omega$

   $$\widetilde{Q}(\mathbf{Z}_n, \theta)|\theta \sim \mathrm{N}(0,1),$$

   si ottiene

   $$\tilde{C}_{1-\alpha} = d_{mv} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \widehat{sd(\theta)}$$

1. **Tabella sinottica** (per quantità pivotali e statistiche test, modello normale)

Probl.	**Modello**	**param.**	**Q. pivotale**	**Statistica test**	**distrib.**
			$Q(\theta, \mathbf{z}_n)$	$Q(\theta_0, \mathbf{z}_n)$	
N1	$\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$	θ	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta)}{\sigma}$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$\mathrm{N}(0, 1)$
N2	$\mathrm{N}(\theta_1, \theta_2)$	θ_1	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta)}{S_n}$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{S_n}$	T_{n-1}
N3	$\mathrm{N}(\mu_0, \theta)$	θ	$\frac{nS_0^2}{\theta}$	$\frac{nS_0^2}{\theta_0}$	χ^2_n
N4	$\mathrm{N}(\theta_1, \theta_2)$	θ_2	$\frac{(n-1)S_n^2}{\theta}$	$\frac{(n-1)S_n^2}{\theta_0}$	χ^2_{n-1}