Laboratorio di decisioni statistiche - Prova finale 1 - 18 dicembre 2024 - Compito A

Nome, cognome e matricola: ______________________________

1. (MC) - Si consideri $X_i, \dots, X_n|\theta \sim \text{EN}(\theta)$ i.i.d. e una distribuzione a priori Gamma per Θ di parametri $\alpha = 2$, $\beta = 3$ (`rate`). Supporre inoltre che $n = 10$ e che la somma delle osservazioni sia pari a 4. Calcolare $\mathbb{E}\left[\Theta^{-2}|\mathbf{z}_n\right]$ con il metodo di MC.

   Risultato:

   Codice

2. Si consideri un campione osservato da modello Poisson con $n = 10$ e somma delle osservazioni pari a 3. Si consideri inoltre come distribuzione iniziale una densità Gamma $(3, 4)$. Determinare l'intervallo a posteriori ET (equal-tails) di livello 0.85 per $\psi = e^{-\theta}$.

   Risultato:

   Codice

3. (MC) - Si consideri $\delta = 2$, $\omega \sim \mathrm{N}(4, 2)$ e $W_\delta(\omega) = |\delta - \omega|$. Calcolare con MC il valore del criterio della soglia critica, assumendo $\lambda = 2$. [**Sugger**.: $K_{sc} = \mathbb{P}[W_\delta(\omega) > \lambda]$.]

Risultato:

Codice

4. (analitico + MC) - $X_1, \ldots, X_n | \theta \sim \mathrm{Ber}[\theta]$. Sia $d(\mathbf{Z}_n) = \overline{X}_n$. Sapendo che $d(\mathbf{Z}_n)$ è non distorto per θ, calcolare analiticamente $R(\theta, d)$ con perdita quadratica. Calcolare poi con MC il valore del rischio di Bayes $r_\pi(d) = \mathbb{E}_\pi[R(\Theta, d)]$ assumendo $n = 5$ e, come distribuzione a priori per Θ, una densità Beta$(5, \texttt{rate} = 3)$. [Sugger.: usare MC per il valore atteso rispetto alla distribuzione a priori.]

Risultato:

Codice

5. (MC) - Modello N$(5, 2)$. Calcolare con MC il valore atteso (frequentista) della statistica $m_3(\mathbf{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ (momento terzo campionario) assumendo $n = 10$.

Risultato:

Codice

6. (MC) - $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim$ EN(θ), $n = 15$. Calcolare con MC la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \pm \frac{n}{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$, assumendo $\theta = 3$.

Risultato:

Codice

7. (MC) - $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(0, \theta)$, i.i.d. - Calcolare con MC la probabilità che la statistica campionaria A_n sia minore di $k = 1$, dove $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}_n|$, ovvero $\mathbb{P}_\theta[A_n < k]$, supponendo che $\theta = 3$ e $n = 9$.

   Risultato:

   Codice

8. (MC) - $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{EN}(\theta)$. Sia $\lambda_{01}(X)$ il rapporto delle verosimiglianze per un campione di dimensione $n = 1$ per il confronto tra $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ vs $H_1 : \theta = \theta_1 = 1$. Calcolare con MC il valore di $\mathbb{E}_\theta[\lambda_{01}(X)]$, supponendo che il vero valore di θ sia $\theta = 1.5$. [Sugg: la verosimiglianza in θ_i è `dgamma(x,1,rate=`θ_i`)`].

   $\mathbb{E}_\theta[\lambda_{01}(X)]$:

   Codice