Abbiamo finora studiato le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

con a_k definitivamente ≥ 0 oppure ≤ 0.

Restano da studiare le serie a termini non definitivamente a segno costante, per es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$ ← a segno alterno.

OSS A queste serie non si possono applicare direttamente i criteri del confronto/confronto asintotico.

Continua invece a valere la C.N. per la convergenza

$$a_k \not\to 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non converge.}$$

DEF Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie. Si dice che essa **converge assolutamente** se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

TEOREMA (criterio della convergenza assoluta)

Se una serie converge assolutamente, allora converge. In formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

Inoltre si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

(dis. triangolare per le serie)

Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3}$$

Vediamo se converge assolutamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(k^2)}{k^2+3} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k^2)|}{k^2+3}$$

Osserviamo che a questa nuova serie posso applicare confronto etc... (perché è a termini non negativi)

$$\frac{|\sin k^2|}{k^2+3} \leq \frac{1}{k^2+3} < \frac{1}{k^2}$$

La serie $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, quindi

la serie $\sum \frac{|\sin(k^2)|}{k^2+3}$ converge (per il confronto)

e quindi la serie di partenza converge assolutamente. Per il teorema, essa converge.

<u>Dim. teorema</u> Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converga.

Consideriamo la seguente serie a termini non negativi.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(|a_k| - a_k\right).$$

Questa serie converge perché

$$\underbrace{|a_k| - a_k \leq |a_k| + |a_k|}_{a_k \geq -|a_k|} = 2|a_k|,$$ la cui serie converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(|a_k| - \left(|a_k| - a_k\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(|a_k| - a_k\right)}_{\text{converge}}$$ converge.

Dis. triangolare. Per la dis. triangolare per $n+1$ elementi

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

$\downarrow n \to \infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow n \to +\infty$

perché sappiamo che le due serie convergono.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$ II

La convergenza assoluta di una serie implica la convergenza "semplice"

Non vale il viceversa, cioè esistono serie che convergono ma non convergono assolutamente.

Esempio:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

dimostreremo tra poco che questa serie converge.
Essa non converge assolutamente, perché
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ diverge (serie armonica)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2} \left(\sin(e^k) + 2\cos(k^2) \right)}_{a_k}$$

segno irregolare.

$$|a_k| = \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2} \underbrace{\left| \sin(e^k) + 2\cos(k^2) \right|}_{\leq} \leq$$

$$|\sin(e^k)| + 2|\cos(k^2)| \leq 1 + 2 = 3$$

$$\leq 3 \cdot \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2}$$

Studio la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2}$

$$\frac{\overbrace{3k^2+2}^{\sim 3k^2}}{\underbrace{k^{7/2}+5k^2}_{\sim k^{7/2}}} \sim \frac{3k^2}{k^{7/2}} = \frac{3}{k^{3/2}} \qquad k\to+\infty$$

e la serie $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge.

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2}$ converge.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge $\underset{\text{Teor. C. A.}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Per le serie a segni qualsiasi valgono delle versioni dei criteri del rapporto e della radice.

CRITERIO del rapporto per serie a segni qualsiasi.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie numerica t.c. $a_k \neq 0$ def^{te}.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell \in [0,+\infty]. \text{ Allora:}$$

1) Se $\ell \in [0,1)$, per il criterio del rapporto applicato alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, questa serie converge, quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, quindi converge.

2) Se $\ell \in (1,+\infty]$ per il criterio del rapporto per succ^{ni}, $|a_k| \to +\infty$, quindi $a_k \not\to 0$, quindi (CN) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge.

Ovviamente il teorema non dice nulla se $\ell = 1$.

Applichiamolo alla serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k}}_{= a_k} \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ parametro})$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|^{\cancel{k+1}}}{k+1} \cdot \frac{k}{\cancel{|x|^k}} \longrightarrow |x|.$$

$$\frac{k}{k+1} \to 1$$

1) se $|x| < 1$, cioè $-1 < x < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \text{converge (assolutamente).}$$

2) se $|x| > 1$, cioè $(x < -1) \vee (x > 1)$,

la serie non converge.

OSS se $x > 1$, la serie diverge a $+\infty$

Restano da studiare (a parte) i casi $x = \pm 1$, per i quali il criterio del rapporto non dà informazioni

se $\boxed{x = 1}$, la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (serie armonica)

se $\boxed{x = -1}$; la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ che (vedremo!) converge ma non assolutamente.

Riassumendo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge se e solo se $x \in [-1, 1)$

In modo simile, si dimostra il criterio della radice per serie a segni qualsiasi.

CRITERIO della radice per serie a segni qualsiasi.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie numerica ~~t.c. $a_k \neq 0$ def^{te}~~

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell \in [0,+\infty]. \text{ Allora:}$$

1) Se $\ell \in [0,1)$, per il criterio della radice applicato alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, questa serie converge, quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, quindi converge.

2) Se $\ell \in (1,+\infty]$ per il criterio della radice per succ^{ni}, $|a_k| \to +\infty$, quindi $a_k \not\to 0$, quindi (CN) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge.

Riconsideriamo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ $= a_k$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \longrightarrow |x|$$

$$\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{\underbrace{\frac{1}{k}\log k}_{\to 0}} \to 1$$

Ritroviamo:

- se $|x| < 1$, la serie conv. (assolutamente)
- se $|x| > 1$, la serie non converge.
- se $|x| = 1$, il criterio non dice nulla. (e si prosegue con altri metodi).

Serie a termini di segno alterno.

Sono le serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

oppure $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

dove $a_k > 0$.

Esempi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}}$

Continuano a valere i teoremi precedenti, ma in più vale il seguente:

CRITERIO di Leibniz Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} t.c.

- $a_k \to 0$
- $\{a_k\}$ strett. decrescente

$(\Rightarrow a_k > 0)$

OSS basta che $\{a_n\}$ decrescente definitivam.

Allora la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ converge.

Inoltre vale la stima, dette $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

$$|S_n - S| < a_{n+1}$$

Esempi: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k}$$

- $\frac{1}{k} \overset{?}{\to} 0$ sì
- $\frac{1}{k}$ strett. decrescente? sì.

Per Leibniz, la serie converge. (ma non assolutamente)

Dim. Criterio $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

$a_k \to 0$, a_k strett. decrescente.

1) $\{S_{2n}\}$ è strett. decrescente, $\{S_{2n+1}\}$ è strett. crescente.

$\underbrace{S_{2n+2}}_{S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}} \overset{?}{<} S_{2n} \iff \cancel{S_{2n}} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \overset{?}{<} \cancel{S_{2n}}$

$a_{2n+2} \overset{?}{<} a_{2n+1}$ vero!

$S_{2n+3} \overset{?}{>} S_{2n+1} \iff \cancel{S_{2n+1}} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \overset{?}{>} \cancel{S_{2n+1}}$

$a_{2n+2} \overset{?}{>} a_{2n+3}$ sì.

2) $\{S_{2n}\}$ è limitata inferiormente

$\{S_{2n+1}\}$ è limitata superiormente.

$S_{2n} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{>0} > S_{2n-1} > S_{2n-3} > \dots > S_1 = a_0 - a_1$

$S_{2n+1} = S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1}}_{>0} < S_{2n} < S_{2n-2} < S_{2n-4} < \dots < S_0 = a_0$

3) $\{S_{2n}\}$ decrescente e limitata inferiorm. $\Rightarrow S_{2n} \to S'' \in \mathbb{R}$

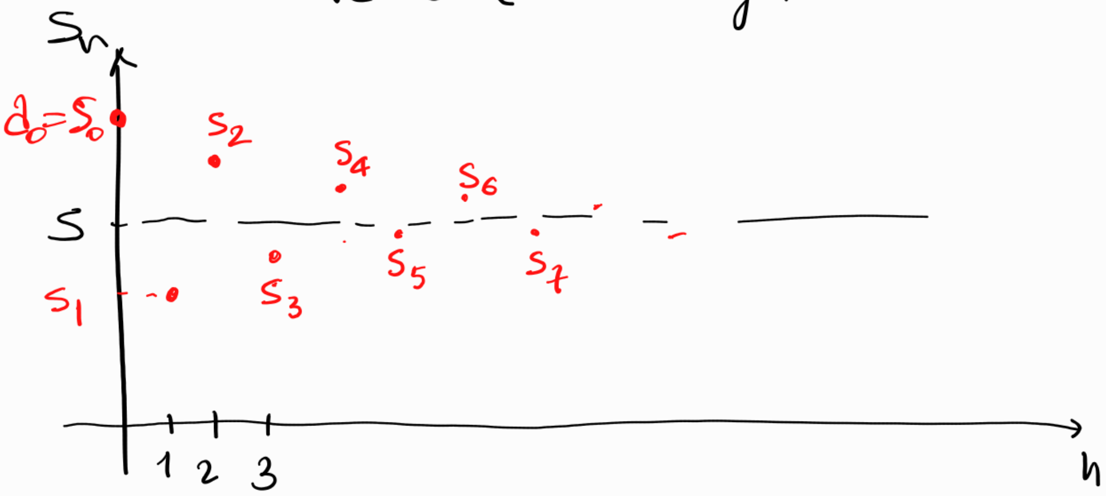
$\{S_{2n+1}\}$ crescente e limitata sup $\Rightarrow S_{2n+1} \to S' \in \mathbb{R}$.

4) $\boxed{S' = S''}$ $\quad S' - S'' = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_{2n} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\underbrace{S_{2n+1}}_{\substack{\shortparallel \\ S_{2n} - a_{2n+1}}} - S_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} (-a_{2n+1}) = 0$$

5) $\left.\begin{array}{l} S_{2n+1} \to S \\ S_{2n} \to S \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

La serie converge.



Resta da provare la stima

$$|S_n - s| < a_{n+1}$$

Due casi $\underline{n \text{ pari}}$.

$$|S_n - S| = S_n - S < S_n - \underbrace{S_{n+1}}_{S_n - a_{n+1}} = a_{n+1}$$

se n pari, $S > S_{n+1}$

$\underline{n \text{ dispari}}$ farlo da soli. $\square$

$\underline{\text{Esempio:}}$ Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \boxed{\frac{k-1}{k^2+1}} \text{ def}^{te} > 0$$

Converge assolutamente? NO,

$$\left|(-1)^k \frac{k-1}{k^2+1}\right| = \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k} \text{ e la serie } \sum \frac{1}{k} \text{ diverge.}$$

Proviamo ad applicare il criterio di Leibniz.

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+1}$$

1) $a_k \overset{?}{\to} 0$ sì

2) a_k decrescente? (almeno def^{te}).

<u>1° modo</u> $a_{k+1} < a_k$

$$\frac{k}{(k+1)^2+1} \overset{?}{<} \frac{k-1}{k^2+1}$$

$$k(k^2+1) \overset{?}{<} (k-1)(k^2+2k+2)$$

$$\cancel{k^3} + k \overset{?}{<} \cancel{k^3} + 2k^2 + \cancel{2k} - k^2 - \cancel{2k} - 2$$

$$k^2 - k - 2 \overset{?}{>} 0 \quad \text{vera def}^{te}.$$

<u>2° modo</u> Pongo $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

oss $f(k) = a_k$.

mi interessa che $f(x)$ sia decrescente per $x \to +\infty$.

cioè $f'(x) < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\overbrace{-x^2+2x+1}^{<0 \text{ per } x \text{ grande}}}{\underbrace{(\ \ )^2}_{>0}}$$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$

$\Rightarrow f$ decresc " " " "

$\Rightarrow f(k+1) < f(k)$ per k abbastanza grande

$a_{k+1} < a_k$.

3° modo (ERRATO!) NON USARE QUESTO METODO

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k} \text{ decrescente}$$

$\cancel{\Rightarrow}$ a_k decrescente

NO, falso!

Siano $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^k}{k}$

$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

Verificare che $a_k \sim b_k$

b_k decrescente

a_k non è decrescente.

Uso della stima $|S_n - S| < a_{n+1}$.

Vorrei stimare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$ con un errore inferiore a 10^{-3}

la serie è una "serie di Leibniz".

$$a_k = \frac{1}{k!} \to 0, \quad \frac{1}{k!} \text{ decrescente}$$

Quindi la serie converge per Leibniz.

$$|S_n - S| < a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$\Downarrow$

$$(n+1)! > 1000$$

Basta prendere $n = 6 \Rightarrow 7! = 5040$.

Il valore approssimato della somma della serie (che, lo vedremo, vale $1/e$), è:

$$S_6 = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= \frac{53}{144}.$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0{,}367}}{\frac{53}{144} - 10^{-3}} < \underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{e} \approx 0{,}36788}}{S} < \frac{53}{144} \approx 0{,}36805$$

Serie di potenze

Sono le serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \;, \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} x_0 \text{ fissato} \\ (\text{centro della serie}) \\ \{a_k\} \text{ succ}^{ne} \text{ fissata} \\ x \text{ parametro} \end{array}$$

Esempio già visto: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ $\quad (x_0 = 0)$

Avevamo trovato che converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$

Esempio: $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(x-3)^k}{(k+2)^2}}}_{b_k}$ $\qquad x_0 = 3$, $\quad a_k = \frac{1}{(k+2)^2}$

N.B. è a segni positivi per $x > 3$

" alterni per $x < 3$

def^{te} nulli per $x = 3$

Criterio della radice (o del rapporto)

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{\frac{|x-3|^k}{(k+2)^2}} = \frac{|x-3|}{\boxed{\sqrt[k]{(k+2)^2}}} \to |x-3|$$

$$\sqrt[k]{(k+2)^2} = (k+2)^{2/k} = e^{\frac{2}{k}\log(k+2)} \to e^0 = 1$$

Quindi:

- se $|x-3| < 1$, cioè $2 < x < 4$
  la serie converge (assolutamente)

- se $|x-3| > 1$, cioè $(x<2) \vee (x>4)$.
  la serie non converge.

- se $|x-3| = 1$, cioè $x-3 = \pm 1$, cioè $(x=2) \vee (x=4)$
  il criterio non dice nulla

Per $x=4$ la serie diventa: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2}$

Poiché $\dfrac{1}{(k+2)^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$, la serie converge

Per $x=2$. la serie diventa $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+2)^2}$

Questa serie converge assolutamente

$$\sum \left|\frac{(-1)^k}{(k+2)^2}\right| = \sum \frac{1}{(k+2)^2} \text{ appena vista}$$

In definitiva la serie converge se e solo se $x \in [2,4]$.

TEOREMA (Convergenza delle serie di potenze).

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze.

Allora $\exists\, r \in [0,+\infty]$, detto raggio di convergenza della serie, t.c.

1) se $|x-x_0| < r$, la serie converge (assolutamente)

2) se $|x-x_0| > r$, la serie non converge.

Il raggio di convergenza r vale

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad \text{oppure} \quad r = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

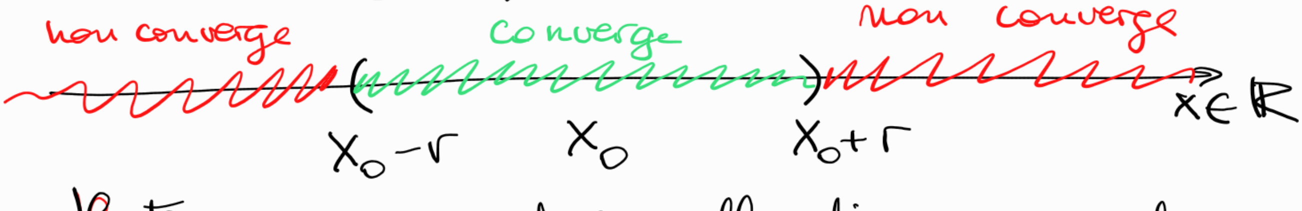
se tali limiti esistono.

<u>OSS</u> se $r=+\infty$, la serie converge (assolut.) $\forall x \in \mathbb{R}$

se $r=0$, la serie non converge $\forall x \neq x_0$

se $x=x_0$ la serie converge banalmente (solo il termine 0-esimo è $\neq 0$).

se $r \in (0,+\infty)$



Il teorema non dice nulla di cosa succede in $x_0 \pm r$ (vanno verificati caso per caso).

Studiamo la convergenza di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k+k} \frac{1}{t^{2k}} \qquad (t \neq 0)$$

Non è una serie di potenze, ma lo diventa ponendo $\frac{1}{t^2} = x$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{e^k+k} \qquad x_0 = 0 \quad \text{(Serie di potenze)}$$

$$a_k = \frac{1}{e^k+k}$$

Raggio di convergenza:

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{k+1}+k+1}^{\sim e^{k+1}}}{\underbrace{e^k+k}_{\sim e^k}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{k+1}}{e^k} = e.$$

- La serie converge per $|x| < e$, cioè $-e < x < e$
- La serie non converge per $|x| > e$, cioè $(x < -e) \vee (x > e)$.

$x = \pm e$?

$x = e$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{e^k+1} \Rightarrow$ la serie non converge (diverge a $+\infty$) perché è a termini >0

$\frac{e^k}{e^k+1} \to 1 \neq 0$

$x = -e$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-e)^k}{e^k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{(-1)^k \frac{e^k}{e^k+1}}$ non converge

$\not\to 0$

La serie di potenze converge $\Leftrightarrow$ $x \in (-e, e)$

La serie di partenza converge $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{t^2} \in (-e, e)$

$$-e < \frac{1}{t^2} < e \Leftrightarrow t^2 > \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

sempre

$$\Leftrightarrow \left(t < -\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \vee \left(t > \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

da vedere

$x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)\cancel{!}}{\cancel{k!}} = \lim_{k \to +\infty} (k+1) = +\infty.$$

La serie converge (assolutamente) $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(e^{-n} + 1 + n^{-2}\right) (x+4)^n$$

$x_0 = -4$

$a_n = \log\left(e^{-n} + 1 + n^{-2}\right)$

$$r = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$$

$|a_n| \sim 1/n^2$

$|a_{n+1}| \sim \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$$a_n = \log\left(\underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\to 0} + 1 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right) \sim \frac{1}{e^n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{\frac{n^2}{e^n}}_{\to 0} + 1\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

- La serie conv. (assolutamente) per $|x+4| < 1$

  cioè $-5 < x < -3$

- La serie non converge per $|x+4| > 1$

  cioè $(x < -5) \vee (x > -3)$.

Per $x = -3$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(e^{-n}+1+n^{-2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}} \quad \text{converge.}$$

Per $x = -5$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(e^{-n}+1+n^{-2}\right)$$

converge assolutamente

<u>Risposta:</u> La serie converge $\Longleftrightarrow$ $x \in [-5,-3]$.