Integrazione di funzioni razionali.

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx \qquad \text{dove} \qquad P_n \text{ e } Q_m \text{ sono polinomi}$$

Se $n \geq m$ posso fare la divisione

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = D_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \qquad \text{dove } k < m.$$

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x}\,dx = \underbrace{\int (x+1)\,dx}_{= \frac{x^2}{2}+x} + \int \frac{3x+1}{x^2-x}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\quad + 2x + 1 & x^2 - x \\ \hline -x^3 + x^2 & x + 1 \\ \hline \quad / \qquad x^2 + 2x + 1 & \\ \qquad -x^2 + x & \\ \hline \qquad / \qquad 3x + 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{3x+1}{x(x-1)}\,dx = (*)$$

Faccio la scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{3x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \qquad \text{con } A \text{ e } B \text{ da trovare.}$$

$$3x+1 = A(x-1) + Bx \qquad \text{uguaglio i coeff}^{\text{ti}} \text{ di uguali grado}$$

grado 1 $\begin{cases} 3 = A + B \\ 1 = -A \end{cases}$ $A = -1$

"   0 $B = 3 - A = 4$

$$(*) = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{4}{x-1}\right) dx = -\log|x| + 4\log|x-1| + c$$

$$= \log \frac{(x-1)^4}{|x|} + c$$

D'ora in poi considereremo $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ con $n < m$

(altrimenti: divisione).

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = (*)$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x\,(x^2 - 3x + 2) = x\,(x-1)(x-2)$$

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x}$$

Calcolo A, B, C.

$$1 = A(x^2 - x) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 - 3x + 2)$$

grado 2
grado 1
grado 0

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = -A - 2B - 3C \\ 1 = 2C \end{cases}$$

$$\boxed{C = 1/2}$$

$$\begin{cases} A + B + 1/2 = 0 \\ -A - 2B - 3/2 = 0 \end{cases}$$

$$-B - 1 = 0$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2}}$$

$$(*) = \int \left(\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \log |x-2| - \log|x-1| + \frac{1}{2} \log |x| + c_1$$

$$= \log \frac{\sqrt{|x||x-2|}}{|x-1|} + c_1$$

Cosa succede se il denominatore ha radici reali con molteplicità > 1?

$$\int \frac{3x+1}{x^3 - 2x^2} dx = \int \frac{3x+1}{x^2(x-2)} dx = (*)$$

Cerco una scomposizione del tipo

$$\frac{3x+1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

Si cercono $A, B, C \in \mathbb{R}$ t.c. valga la scomposizione

Si trova (verificare!) $A = -7/4$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{7}{4}$

$$(*) = -\frac{7}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{7}{4} \log |x| + \frac{1}{2x} + \frac{7}{4} \log |x-2| + c_1$$

Se fosse stato

$\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3(x-2)^2} dx$, avrei cercato una scomposizione del tipo

$$\frac{3x+1}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

Cosa succede se ci sono radici complesse coniugate?

$$\int \frac{3x^2+x}{x^4-1}\,dx$$

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

irriducibile nei reali (radici: $\pm i$)

Si cerca una scomposizione del tipo

$$\frac{3x^2+x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{2Cx+D}{x^2+1}$$

Si trovano A, B, C, D (farlo!)

$$\int \frac{3x^2+x}{x^4-1}\,dx = A\underbrace{\int \frac{dx}{x-1}}_{\log|x-1|} + B\underbrace{\int\frac{dx}{x+1}}_{\log|x+1|} + C\boxed{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx} + D\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$x^2+1=t$

$2x\,dx = dt$

$$\int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log(x^2+1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{3x^2+x}{x^4-1}\,dx = A\log|x-1| + B\log|x+1| + C\log(x^2+1) + D\operatorname{arctg}x + c_1$$

$$\int \frac{1}{(x+1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{irriducibili}}}\,dx = (*)$$

derivata del denominatore

Si scompone così $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}$

Si trovano A, B, C.

$$(*) = A\boxed{\int \frac{dx}{x+1}} + B\boxed{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx} + C\boxed{\int \frac{dx}{x^2+x+1}}$$

$$\log|x+1| \qquad \log(x^2+x+1) \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c_1$$

Resta da considerare il caso di radici complesse coniugate con molteplicità maggiore di 1.

Resta da considerare il caso di radici complesse coniugate con molteplicità maggiore di 1.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x \boxed{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}\,dx = (*)$$

Per parti $\quad f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx =$ sost. $1+x^2=t$, $2x\,dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1.$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + c.$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right] + c}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^3}\, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,(2x)}{(1+x^2)^3}\, dx$$

Integro per parti

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2x}{(1+x^2)^3}\, dx = \qquad \text{sost. } \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)^2}$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1.$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \right] =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right] + \frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + c$$

Esercizio: Trovare una formula iterativa per

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}\, dx$$

Si trova

$$I_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Esercizio riassuntivo:

$$\int \frac{P_n(x)}{(5x-2)(x-1)^3\underbrace{(x^2+2x+17)^2}_{\text{irriducibile}}}\,dx = (*) \quad \text{supponiamo } n \leq 7$$

$$(*) = \int \frac{A}{5x-2}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{C}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{D}{(x-1)^3}\,dx +$$

$$+ \int \frac{E(2x+2)+F}{x^2+2x+17}\,dx + \int \frac{G(2x+2)+H}{(x^2+2x+17)^2}\,dx =$$

In generale si trovano $A, B, \ldots H$.

$$= \frac{A}{5}\log|5x-2| + B\log|x-1| - \frac{C}{x-1} - \frac{D}{2(x-1)^2} +$$

$$+ E\log(x^2+2x+17) + \frac{F}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{4}\right) - \frac{G}{x^2+2x+17} +$$

$$+ H\left(\frac{1}{128}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{4} + \frac{1}{32}\,\frac{x+1}{x^2+2x+17}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+16} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+16} =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1} = \frac{1}{16}\cdot 4\operatorname{arctg}\frac{x+1}{4}$$

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+17)^2}\,dx = \qquad x^2+2x+17 = t \qquad (2x+2)\,dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+2x+17}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+17)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+16)^2} = \frac{1}{256} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1\right)^2} =$$

sost. $\frac{x+1}{4} = t \Rightarrow dx = 4\,dt$

$$= \frac{4}{256} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \text{ copio dalla formula}$$

$$= \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} \right] = \qquad t = \frac{x+1}{4}$$

$$= \frac{1}{128} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + \frac{\frac{x+1}{4}}{1+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{128} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + \frac{4}{128} \frac{x+1}{x^2+2x+17}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+16} = (*)$$

Si scompone il denominatore

trovo le soluzioni nei complessi (le radici quarte di -16)

$$x^4+16 = (x^4+16+8x^2) - 8x^2$$
$$= (x^2+4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2$$
$$= (x^2+4-2\sqrt{2}x)(x^2+4+2\sqrt{2}x)$$

$$(*) = \int \frac{dx}{(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)} =$$

$$= \int \left(\frac{A(2x-2\sqrt{2})+B}{x^2-2\sqrt{2}x+4} + \frac{C(2x+2\sqrt{2})+D}{x^2+2\sqrt{2}x+4} \right) dx$$

Trovo A, B, C, D.

$$= A \log(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) + B \int \frac{dx}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4} +$$

$(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + 2$

viene fuori un arctg

$$+ C \log(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) + D \int \frac{dx}{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4}$$

viene fuori un altro arctg.

Sostituzioni speciali

Nel seguito le funzioni $R(x)$ oppure $R(x,y)$ sono funzioni razionali, cioè rapporti di polinomi nelle variabili indicate.

1) $\int R(e^x)\,dx =$ $\left[\begin{array}{l} \text{Si pone } e^x = t \\ x = \log t \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array}\right.$

$$= \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

Esempio $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}\,dx =$ $\quad e^x = t, \quad x = \log t, \quad dx = \frac{dt}{t}$

$$= \int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{t(t^2+1)}\,dt = (*)$$

$$\frac{t-1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{2Bt + C}{t^2+1}$$

$$t - 1 = A(t^2+1) + 2Bt^2 + Ct$$

grado 2 $\quad 0 = A + 2B$

1 $\quad 1 = C$

0 $\quad -1 = A$

$\boxed{C = 1}$

$\boxed{A = -1}$

$\boxed{B = -\frac{A}{2} = \frac{1}{2}}$

$$= -\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\log|t| + \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t + c_1$$

$$= -x + \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) + \operatorname{arctg}(e^x) + c_1$$

OSS: A volte convengono sost. diverse

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx =$$

come prima $e^x = t$

$e^{2x} = t \Rightarrow 2x = \log t$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2t}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{(t+1)t}\,dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\right)dt \quad \text{etc...}$$

---

2. Integrali della forma $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$

Si pone $\sqrt[n]{ax+b} = t \Longrightarrow ax+b = t^n$

$$x = \frac{t^n - b}{a}$$

$$dx = \frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt$$

L'integrale diventa $\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt$

$$\int \frac{dx}{(x+6)\sqrt{x+2}} =$$

$\sqrt{x+2} = t$

$x+2 = t^2$

$x = t^2 - 2$

$dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{(t^2+4)\cancel{t}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{2}{4}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+2}}{2} + c$$

OSS Questo è un caso particolare della classe

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Si pone $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^2$

$$\Rightarrow ax+b = t^2(cx+d)$$

$$\Rightarrow x = \frac{b-t^2d}{ct^2-a} \Rightarrow dx = \dots\dots$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+x}{x+1}}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3+x}{x+1}} = t \Rightarrow 3+x = t^2(x+1) \\ \Rightarrow x = \frac{3-t^2}{t^2-1} \\ \Rightarrow dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\, dt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cancel{t^2-1}}{3-t^2}\, t \cdot \frac{(-4t)}{(t^2-1)^{\cancel{2}}}\, dt$$

$$= \int \frac{-4t^2}{(3-t^2)(t^2-1)}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}\right) dt$$

Trovati A, B, C, D l'integrale è presto calcolato.

---

3. Integrali della forma $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Una sostituzione tipica è $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

OSS deve essere $x \neq (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t + k\pi \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2\, dt}{1+t^2} \qquad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = (*) \qquad (x \neq k\pi)$

<u>1° modo</u> $\quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$(*) = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\,\frac{\cancel{2}\,dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

<u>2° modo</u>

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx =$$

[sost. $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$]

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}\right) dt =$$

[si trova subito $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$]

$$= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + c$$

Controllare che i due risultati trovati differiscono per una costante.

<u>OSS</u> Non sempre le sost. standard sono la via migliore

$\displaystyle\int \cos^7 x\,dx$

$\to$ $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (non conviene!)

$\to$ Usare le formule iterative per

$$I_n(x) = \int \cos^n x\,dx$$

$$\to = \int \cos^6 x \cos x\,dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^3 \cos x \, dx = \quad \left[\text{sost. } \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= \int (1-t^2)^3 \, dt =$$

$$= \int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) \, dt =$$

$$= \left(t - t^3 + \frac{3}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 \right)_{t = \sin x} + c$$

3'. Integrali della forma $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) \, dx$

Ovviamente si può usare la sost. $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ma di solito è più semplice usare la sost.

$$\boxed{t = \operatorname{tg} x}$$

N.B. $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

da cui $x = \operatorname{arctg} t + k\pi \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$; $\quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$;

$\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \frac{t}{1+t^2}$

Esempio

$$\int \frac{3 \sin^2 x + 1}{2 + \cos^2 x} \, dx = \quad [t = \operatorname{tg} x]$$

$$= \int \frac{3 \frac{t^2}{1+t^2} + 1}{2 + \frac{1}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{3t^2 + 1 + t^2}{2 + t^2 + 1} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{4t^2 + 1}{(2t^2+3)(1+t^2)} \, dt$$

Invece con la sost. $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sarebbe venuta una frazione più complicata