Esercizi di Teoria Statistica delle Decisioni (F. De Santis)
Parte 2: Decisioni
a.a. 2024-2025

Esercizi

1. Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ e sia Δ formato da 4 decisioni. Associare a ciascuna δ_i una funzione di perdita W_{δ_i} in modo tale che:

   a. δ_1 sia inammissibile;

   b. $\delta_2 \succeq \delta_3$;

   c. δ_4 sia non uniformemente peggiore di δ_3.

Soluzione.

Ad esempio possiamo considerare

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
ω_1	3	2	2.5	4
ω_2	3	3	3	2

(a) $\delta_2 \succ \delta_1$.

(b) $\delta_2 \succeq \delta_3$.

(c) $W_{\delta_4}(\omega_2) = 2 < 3 = W_{\delta_3}(\omega_2)$.

2. Calcolare per il seguente problema di decisione il valore del criterio di Bayes-Laplace per δ_1 e δ_2:

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2
ω_1	1	3
ω_2	2	2
ω_3	3	3/2

Quale decisione è la migliore rispetto al criterio utilizzato?

Soluzione.

Per il criterio di B-L consideriamo $p(\omega_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$ e applichiamo il criterio del valore atteso. In questo caso $K_{BL}[W_{\delta_1}] = 2$ e $K_{BL}[W_{\delta_2}] = \frac{13}{6}$. Pertanto la decisione ottima rispetto al criterio è δ_1.

3. Calcolare per il seguente problema di decisione il valore del criterio *minimax* e del criterio del *valore atteso* per δ_1 e δ_2, utilizzando la distribuzione $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$ su Ω:

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2
ω_1	1	2
ω_2	2	1

Quale decisione è la migliore rispetto a ciascuno dei due criteri?

Soluzione.

$K_{va}[W_{\delta_1}] = \frac{7}{4}$ e $K_{va}[W_{\delta_2}] = \frac{5}{4}$. Pertanto la decisione ottima rispetto al criterio del v.a. è δ_2.
$K_m[W_{\delta_1}] = K_m[W_{\delta_2}] = 2$. Pertanto le due decisioni sono equivalenti rispetto al criterio del minimax.

4. Per il seguente problema di decisione, calcolare il valore del criterio *minimax* e del criterio del *valore atteso* per δ_1 e δ_2, utilizzando la distribuzione $p_1 = 1/3$, $p_2 = 2/3$ su Ω:

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2
ω_1	0	4
ω_2	2	1

Quale decisione è la migliore rispetto a ciascuno dei due criteri?

Soluzione.

$K_m[W_{\delta_1}] = 2$ e $K_m[W_{\delta_2}] = 4$. Pertanto la decisione ottima rispetto al criterio del minimax è δ_1.
$K_{va}[W_{\delta_1}] = \frac{4}{3}$ e $K_{va}[W_{\delta_2}] = 3$. Pertanto rispetto al criterio del v.a. è preferibile δ_1.

5. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Si considerino le seguenti funzioni di perdita per le due decisioni.

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2
ω_1	1	2
ω_2	2	2
ω_3	3	1

Determinare il valore di λ (indice di ottimismo-pessimismo) affinché le due decisioni siano equivalenti rispetto al criterio di Hurwics.

Soluzione.

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2
ω_1	1	2
ω_2	2	2
ω_3	3	1
$\inf W_{\delta_j}(\cdot)$	1	1
$\sup W_{\delta_j}(\cdot)$	3	2

$K_H[W_{\delta_1}] = \lambda \cdot (3) + (1-\lambda) \cdot (1) = 3\lambda + 1 - \lambda$,
$K_H[W_{\delta_2}] = \lambda \cdot (2) + (1-\lambda) \cdot (1) = 2\lambda + 1 - \lambda$.
Le due decisioni sono equivalenti se $\lambda = 0$.

6. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Si considerino le seguenti funzioni di perdita per le due decisioni.

$W_{\delta_j}(\omega_j)$	δ_1	δ_2
ω_1	1	3
ω_2	5	1

(a) Determinare le due funzioni di rimpianto $W^R_{\delta_1}(\omega)$ e $W^R_{\delta_2}(\omega)$.

(b) Determinare la decisione ottima rispetto al criterio di Savage.

Soluzione.

(a) Ricordiamo che, data una funzione di perdita $W_\delta(\cdot)$, la funzione di rimpianto (*regret function*) è definita come segue: $W^R_\delta(\omega) = W_\delta(\omega) - W^\star(\omega)$, con $W^\star(\omega) = \inf_\delta W_\delta(\omega)$. La seguente tabella riporta le due funzioni di perdita $W^R_{\delta_j}(\cdot),\ j = 1, 2$.

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2	$W^\star(\omega_i)$	$W^R_{\delta_1}$	$W^R_{\delta_2}$
ω_1	1	3	1	0	2
ω_2	5	1	1	4	0
$\max W^R_{\delta_j}$				4	2

(b) Applicando il criterio del minimax alle funzioni di rimpianto, per criterio di Savage la decisione migliore è δ_2.

7. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega = [0, 1]$. Si considerino le seguenti funzioni di perdita per le due decisioni in esame:
$$W_{\delta_1}(\omega) = \omega^2, \qquad W_{\delta_2}(\omega) = 1 - \omega^2.$$

(a) Tracciare i grafici delle due funzioni di perdita e determinare le coordinate del loro punto di intersezione

(b) Determinare $\Delta^*(K_{va})$ e $\Delta^*(K_m)$, utilizzando la distribuzione $p(\omega) = 1,\ \omega \in \Omega$. ($K_m$ indica il criterio del minimax).

Soluzione.

(a) Si tratta di due archi di parabola nell'intervallo $\omega \in [0, 1]$. Tracciare a mano i grafici e verificare con:

```
curve(x^2,from=0,to=1, ylab="",xlab=expression(omega))
curve(1-x^2,add=TRUE)
```

Punto di intersezione. Si ha $\omega^2 = 1 - \omega^2 \ \Leftrightarrow\ \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ricordare che $\omega \in [0, 1]$). Il punto è quindi $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) $K_{va}[W_{\delta_1}] = \int_0^1 \omega^2\ p(\omega)\ d\omega = \int_0^1 \omega^2\ d\omega = \frac{1}{3}$.
$K_{va}[W_{\delta_2}] = \int_0^1 (1 - \omega^2)\ p(\omega)\ d\omega = \int_0^1 (1 - \omega^2)\ d\omega = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
$K_m[W_{\delta_1}] = K_m[W_{\delta_2}] = 1$.
Quindi per il criterio del valore atteso è preferibile δ_1; per il criterio del minimax le due decisioni sono equivalenti.

8. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega = [0,1]$. Si considerino le seguenti funzioni di perdita per le due decisioni in esame:

$$W_{\delta_1}(\omega) = \omega^2, \qquad W_{\delta_2}(\omega) = \frac{1}{2}\omega.$$

(a) Tracciare i grafici delle due funzioni di perdita.

(b) Stabilire quale tra le due decisioni è preferibile utilizzando il criterio della soglia critica con $\lambda = \frac{1}{4}$ e $p(\omega) = I_{[0,1]}(\omega)$.

Soluzione.

(a) Tracciare a mano i grafici e verificare con:

```
curve(x^2,from=0,to=1,ylab="", xlab=expression(omega))
curve(x/2,add=TRUE).
```

Punti di intersezione in $[0,1]$. Si ha $\omega^2 = \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. I punti di intersezione sono quindi $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

(b) $W_{\delta_1}(\omega) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Quindi $K_{sc}[W_{\delta_1}] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} p(\omega) d\omega = \frac{1}{2}$.
Analogamente $W_{\delta_2}(\omega) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Quindi $K_{sc}[W_{\delta_2}] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} p(\omega) d\omega = \frac{1}{2}$.
Le due decisioni sono quindi equivalenti per il criterio K_{sc}.

9. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega = [0,1]$. Si considerino le seguenti funzioni di perdita per le due decisioni in esame:

$$W_{\delta_1}(\omega) = 1 - \frac{2}{3}\omega, \qquad W_{\delta_2}(\omega) = \frac{2}{3}\omega.$$

(a) Tracciare i grafici delle due funzioni di perdita e le coordinate del loro punto di intersezione.

(b) Stabilire quale tra le due decisioni è preferibile utilizzando i criteri del minimax e del valore atteso con $p(\omega) = I_{[0,1]}(\omega)$.

(c) Stabilire quale tra le due decisioni è preferibile utilizzando il criterio della soglia critica con $\lambda = \frac{1}{2}$.

Soluzione.

(a) Tracciare a mano i grafici delle due rette e verificare con

```
curve(1-(2/3)*x,from=0,to=1, ylim=c(0,1), ylab="",
xlab=expression(omega))
curve(2/3*x,add=TRUE)
```

Punto di intersezione: $P = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) $K_m[W_{\delta_1}] = 1 > K_m[W_{\delta_2}] = \frac{2}{3} \Longrightarrow$ con K_m preferibile δ_2.
$K_{va}[W_{\delta_1}] = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{3}\omega\right) d\omega = \frac{2}{3}$; $K_{va}[W_{\delta_2}] = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\omega\right) d\omega = \frac{1}{3} \Longrightarrow$ con K_{va} preferibile δ_2.

(c) $K_{sc}[W_{\delta_1}] = \int_0^{\frac{3}{4}} p(\omega)d\omega = \frac{3}{4}$; $K_{sc}[W_{\delta_2}] = \int_{\frac{3}{4}}^1 p(\omega)d\omega = \frac{1}{4}$.
Anche per il criterio K_{sc} è preferibile δ_2.

10. Sia $\Delta = \{\delta_1 = \frac{2}{3}, \delta_2 = \frac{2}{5}\}$, $\Omega = [0, +\infty)$ e $p(\omega)$ la funzione di densità della v.a. Gamma di parametri $(2, 3)$. Considerare $W_{\delta_i}(\omega) = (\omega - \delta_i)^2$. Determinare $\Delta^*(K_{va})$ e verificare che le decisioni sono equivalenti rispetto al criterio del minimax.

Soluzione.

$K_{va}[W_{\delta_i}] = \mathbb{E}[(\omega - \delta_i)^2] = \mathbb{E}[(\omega \pm \mathbb{E}(\omega) - \delta_i)^2] = \mathbb{E}[(\omega - \mathbb{E}(\omega))^2] + (\mathbb{E}(\omega) - \delta_i)^2 + 0 = \mathbb{V}[\omega] + (\mathbb{E}(\omega) - \delta_i)^2 = \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3} - \delta_i\right)^2$. La decisione ottima è quindi δ_1. Il risultato era scontato in quanto la quantità $\mathbb{E}[(\omega - \delta)^2]$ è minimizzata, al variare di δ in Ω, da $\delta = \mathbb{E}(\omega)$ e, nell'esempio considerato, $\delta_1 \equiv \mathbb{E}[\omega] = \frac{2}{3}$.
Per il minimax si osservi che $\sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} W_{\delta_i}(\omega) = \infty,\ i = 1, 2$ e quindi $K_m[W_{\delta_i}] = \infty,\ i = 1, 2$ (equivalenti).

11. Siano $\Delta = \Omega = [0, 1]$. Si considerino le due funzioni di perdita

$$W^a_\delta(\omega) = (\omega - \delta)^2, \qquad W^b_\delta(\omega) = \frac{(\omega - \delta)^2}{\omega(1 - \omega)}.$$

Sia $p(\omega)$ la funzione di densità della v.a Beta di parametri $(2, 2)$. Calcolare il criterio del valore atteso di $\delta = \mathbb{E}[\omega] = \frac{1}{2}$, utilizzando le due funzioni di perdita.

Soluzione.

$\mathbb{E}[W^a_\delta(\omega)] = \mathbb{E}[(\omega \pm \mathbb{E}[\omega] - \delta)^2] = \mathbb{V}[\omega] + (\delta - \mathbb{E}[\omega])^2 = \frac{\alpha\beta}{[(\alpha+\beta)^2](\alpha+\beta+1)} + 0 = \ldots (\text{con } \alpha = \beta = 2) = \frac{1}{20}$, in quanto $\delta = \frac{1}{2} = \mathbb{E}[\omega]$.
$\mathbb{E}[W^b_\delta(\omega)] = \int_0^1 \frac{(\omega - \mathbb{E}[\omega])^2}{\omega(1-\omega)} p(\omega) d\omega = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (\omega - \mathbb{E}[\omega])^2 \omega^{(\alpha-1)-1}(1 - \omega)^{(\beta-1)-1} d\omega = \frac{B(\alpha-1,\beta-1)}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{V}'[\omega]$, dove con $\mathbb{V}'[\omega]$ indichiamo la varianza della v.a. Beta di parametri $(\alpha - 1, \beta - 1)$. Abbiamo quindi che $\mathbb{E}[W^b_\delta(\omega)] = \frac{B(\alpha-1,\beta-1)}{B(\alpha,\beta)} \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{[(\alpha+\beta-2)^2](\alpha+\beta-1)} = \ldots (\text{con } \alpha = \beta = 2) = \frac{1}{2}$.

12. Sia $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Si abbia inoltre che

$$W_{\delta_1}(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega$$

e che

$$W_{\delta_2}(\omega) = W_{\delta_1}(\omega) - c, \qquad 0 < c < \inf_{\omega \in \Omega} W_{\delta_1}(\omega)$$

(c è una costante). Stabilire se il criterio bayesiano $K(W_\delta) = \mathrm{Var}(W_\delta)$ risulta monotono e strettamente monotono.

Soluzione.

$K[W_{\delta_2}] = \mathbb{V}[W_{\delta_1} - c] = \mathbb{V}[W_{\delta_1}] = K[W_{\delta_1}]$. Quindi è vero che

$$W_{\delta_2}(\omega) \leq W_{\delta_1}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \implies K[W_{\delta_1}] = K[W_{\delta_2}]$$

e la monotonia (semplice) risulta verificata.

13. Siano $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$, $a \geq 0$. Si consideri il problema decisionale con funzioni di perdita e distribuzione a priori su Ω definite nella seguente tabella, in cui si assume che $a \geq 0$:

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2	p_i
ω_1	2	4	$\frac{1}{3}$
ω_2	a	5	$\frac{2}{3}$

(a) Determinare i valori di $a \geq 0$ per i quali $\delta_1 \succeq \delta_2$ rispetto al criterio K_{va}.

(b) Determinare i valori di $a \geq 0$ per i quali $\delta_1 \succeq \delta_2$ rispetto al criterio K_m (minimax).

(c) Determinare le espressioni del criterio di Hurwicz (K_H) per W_{δ_1} e W_{δ_2} (in funzione di $\lambda \in [0, 1]$).

(d) Porre $\lambda = \frac{1}{4}$, rappresentare i grafici di $K_H[W_{\delta_i}]$ per $i = 1, 2$ in funzione di a e determinare i valori di $a \geq 0$ per i quali $\delta_1 \succeq \delta_2$ rispetto al criterio K_H.

Soluzione.

(a) $K_{va}[W_{\delta_1}] = \frac{2}{3}(1+a)$ e $K_{va}[W_{\delta_2}] = \frac{14}{3}$. Quindi $\delta_1 \succeq \delta_2$ (per il criterio del v.a.) se $a \leq 6$.

(b) $K_m[W_{\delta_1}] = \max\{a, 2\}$ e $K_m[W_{\delta_2}] = 5$. Quindi $\delta_1 \succeq \delta_2$ (per il criterio del minimax) se $a \leq 5$.

(c) $K_H[W_{\delta_1}] = \lambda \max\{a, 2\} + (1-\lambda)\min\{a, 2\} = \begin{cases} \lambda(2-a)+a, & a \leq 2 \\ \lambda(a-2)+2, & a \geq 2 \end{cases}$

$K_H[W_{\delta_1}] = \lambda + 4$.

(d) Se $\lambda = \frac{1}{4}$, abbiamo

$K_H[W_{\delta_1}] = \begin{cases} \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}, & a \leq 2 \\ \frac{a}{4} + \frac{3}{2}, & a \geq 2 \end{cases}$ e $K_H[W_{\delta_1}] = \frac{17}{4}$.

Il grafico si ottiene con

```
K.h=function(a){((3/4)*a+1/2)*(a <=2) + ((1/4)*a+3/2)*(a>2)}
curve(K.h(x), from = 0, to=20)
abline(h=17/4)
```

Quindi $K_H[W_{\delta_1}] \leq K_H[W_{\delta_2}] \Leftrightarrow \frac{a}{4} + \frac{3}{2} \leq \frac{17}{4} \Leftrightarrow a \geq 11$.

14. Sia $\Delta = \Omega = I\!R$. Si assuma che, $\forall \delta \in I\!R$, la funzione di perdita della decisione sia definita da $W_\delta(\omega) = (\omega - \delta)^2$. Si consideri inoltre la distribuzione a priori $p(\omega) = \mathrm{N}(\omega|\mu_0, 1)$, con $\mu_0 \in I\!R$.

(a) Tracciare il grafico di $W_{\delta_1}(\omega)$ e $W_{\delta_2}(\omega)$ al variare di $\omega \in I\!R$ per le decisioni $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$.

(b) Determinare i valori di ω per i quali $\delta_1 \succ \delta_2$ e il valore di ω per il quale δ_1 e δ_2 hanno la stessa perdita.

(c) Determinare $\Omega_0 = \{\omega \in I\!R : \quad W_{\delta_1}(\omega) \leq 1\}$ e l'espressione di $\mathbb{P}[\Omega_0]$ in funzione di μ_0 e per $\mu_0 = 0$.

(d) Verificare che, per una generica $\delta \in \Delta$ e per $\mu_0 \in I\!R$, $K_{va}[W_\delta] = 1 + (\mu_0 - \delta)^2$.

(e) Verificare che, per due generiche decisioni $\delta_a, \delta_b \in \Delta$, $K_{va}[W_{\delta_a}] = K_{va}[W_{\delta_b}] \Leftrightarrow \mu_0 = \frac{\delta_a + \delta_b}{2}$.

(f) Commentare il risultato in (e).

Soluzione.

(a) Usare

```
W1.fun=function(w){(w-1)^2}
W2.fun=function(w){(w-2)^2}
curve(W1.fun(x),from=0,to=4,xlab=expression(omega), ylab="")
curve(W2.fun(x),add=TRUE, lty=2)
```

(b) $W_{\delta_1}(\omega) \leq W_{\delta_2}(\omega) \;\Leftrightarrow\; \omega \leq \frac{3}{2}$.

(c) $W_{\delta_1}(\omega) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in [0,2]$. Quindi

$$\mathbb{P}[\Omega_0] = \int_0^2 p(\omega)d\omega = \Phi(2-\mu_0) - \Phi(-\mu_0),$$

con $\Phi(\cdot)$ funzione di ripartizione della v.a. $\mathrm{N}(0,1)$.

(d) $K_{va}[W_\delta] = \mathbb{E}[(\omega \pm \mathbb{E}[\omega] - \delta)^2] = \ldots = \mathbb{V}[\omega] + (\mathbb{E}[(\omega) - \delta)^2 + 0 = \mathbb{V}[\omega] + (\mu_0 - \delta)^2 = 1 + (\mu_0 - \delta)^2$.

(e) Dal punto precedente segue che
$K_{va}[W_{\delta_a}] = K_{va}[W_{\delta_b}] \;\Leftrightarrow\; 1 + (\mu_0 - \delta_a)^2 = 1 + (\mu_0 - \delta_b)^2 \;\Leftrightarrow\; \mu_0 = \frac{\delta_a + \delta_b}{2}$.
Le perdite sono equivalenti in valore atteso per μ_0 coincidente con δ_0, punto medio di $[\delta_a, \delta_b]$, dove le due perdite sono uguali. Vedi grafico al punto 1.

15. Sia $\Delta = \Omega = I\!R$. Si assuma che, $\forall \delta \in I\!R$, la funzione di perdita della decisione sia definita da $W_\delta(\omega) = |\omega - \delta|$. Si consideri inoltre la distribuzione a priori $\pi(\omega) = \frac{1}{k} I_{[0,k]}(\omega),\ k > 1$.

    (a) Tracciare il grafico di $W_{\delta_1}(\omega)$ e $W_{\delta_2}(\omega)$ al variare di $\omega \in I\!R$ per le decisioni $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$.

    (b) Determinare i valori di ω per i quali $\delta_1 \succ \delta_2$ e il valore di ω per il quale δ_1 e δ_2 hanno la stessa perdita.

    (c) Determinare $\Omega_0 = \{\omega \in I\!R : \quad W_{\delta_1}(\omega) \leq 1\}$ e l'espressione di $\mathbb{P}[\Omega_0]$ in funzione di k.

    (d) Calcolare il valore di $K_{va}[W_{\delta_1}]$ $k > 1$.

Soluzione.

(a) Usare

```
W1.fun=function(w){abs(w-1)}
W2.fun=function(w){abs(w-2)}
curve(W1.fun(x),from=0,to=4,xlab=expression(omega), ylab="")
curve(W2.fun(x),add=TRUE, lty=2)
```

(b) $W_{\delta_1}(\omega) \le W_{\delta_2}(\omega) \;\Leftrightarrow\; \omega \le \frac{3}{2}$ (con uguaglianza in $\omega_0 = \frac{3}{2}$).

(c) $W_{\delta_1}(\omega) \le 1 \;\Leftrightarrow\; |\omega - 1| \le 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in [0,2] = \Omega_0$.
$\mathbb{P}[\Omega_0] = \frac{1}{k}\int_0^2 I_{[0,k]}(\omega)d\omega = \begin{cases} 1 & 1 < k \le 2 \\ \frac{2}{k} & k > 2 \end{cases}$.

(d) $K_{va}[W_{\delta_1}] = \int_{\mathbb{R}} |\omega - 1| p(\omega) d\omega = \int_0^k |\omega - 1| \frac{1}{k} I_{[0,k]}(\omega) d\omega =$
$= \frac{1}{k}\left(\int_0^1 (1-\omega)d\omega + \int_1^k (\omega - 1)d\omega\right) = \frac{1}{2k}\left(k^2 - 2k + 2\right).$

16. Siano $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Si consideri il problema decisionale con funzioni di perdita e distribuzione a priori su Ω definite nella seguente tabella:

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2	δ_3	$p(\omega_i)$
ω_1	2	1/2	1	π
ω_2	1	3	2	$1-\pi$

(a) Determinare il valore del criterio del valore attesoK_{va} per le tre decisioni.

(b) Tracciare il grafico di K_{va} per le tre decisioni in funzione di $\pi \in [0,1]$.

(c) Determinare i valori di π tali che $\delta_2 \succeq \delta_1$ rispetto al criterio K_{va}.

(d) Determinare i valori di π tali che $\delta_2 \succeq \delta_1 \succeq \delta_3$.

(e) Determinare il valore $\overline{\pi}$ di π per il quale $\delta_1 \approx \delta_3$ (rispetto a l criterio del valore atteso) e calcolare $\Delta^*(K_{va})$ per $\pi = \overline{\pi}$.

Soluzione.

(a)
- $K_{va}[W_{\delta_1}] = 2\pi + (1-\pi) = 1+\pi$
- $K_{va}[W_{\delta_2}] = \frac{1}{2}\pi + 3(1-\pi) = 3 - \frac{5}{2}\pi$
- $K_{va}[W_{\delta_3}] = \pi + 2(1-\pi) = 2-\pi$

(b) Usare

```
curve(1+x,from=0,to=1,ylim=c(1,3), ylab="", xlab=expression(pi))
curve(3-5/2*x, add=TRUE,lty=2)
curve(2-x,add=TRUE,lty=3)
```

(c) $K_{va}[W_{\delta_2}] \leq K_{va}[W_{\delta_1}] \;\Leftrightarrow\; 3 - \frac{5}{2}\pi \leq 1+\pi \;\Leftrightarrow\; \pi \geq \frac{4}{7}$.

(d) $K_{va}[W_{\delta_1}] \leq K_{va}[W_{\delta_3}] \;\Leftrightarrow\; 1+\pi \leq 2-\pi \;\Leftrightarrow\; \pi \leq \frac{1}{2}$.
Quindi
$K_{va}[W_{\delta_2}] \leq K_{va}[W_{\delta_1}] \leq K_{va}[W_{\delta_3}] \;\Leftrightarrow\; \pi \geq \frac{4}{7} \,\wedge\, \pi \leq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\;$ mai.

(e) $K_{va}[W_{\delta_1}] = K_{va}[W_{\delta_3}] \;\Leftrightarrow\; \pi = \overline{\pi} = \frac{1}{2}$. Si ha quindi che $K_{va}[W_{\delta_1}] = K_{va}[W_{\delta_3}] = \frac{3}{2}$ e $K_{va}[W_{\delta_2}] = \frac{7}{4}$. Pertanto $\Delta^\star(K_{va}) = \{\delta_1, \delta_3\}$.

17. Siano $\Delta = \Omega = [0,1]$. Si considerino le due funzioni di perdita

$$W_\delta^a(\omega) = (\omega-\delta)^2, \qquad W_\delta^b(\omega) = \frac{(\omega-\delta)^2}{\omega(1-\omega)}.$$

Sia $p(\omega)$ la funzione di densità della v.a Beta di parametri $(2,3)$. Determinare quanto richiesto di seguito.

(a) Valore di δ_a^* (decisione ottima rispetto a $K_{va}[W_\delta^a]$).
(b) Valore di δ_b^* (decisione ottima rispetto a $K_{va}[W_\delta^b]$).
(c) Valore del criterio del valore atteso di δ_a^* e δ_b^* utilizzando la funzione di perdita W_δ^a.

Soluzione.

(a) Poichè $K_{va}[W_\delta^a] = \mathbb{E}[(\omega \pm \mathbb{E}[\omega] - \delta)^2] = \mathbb{V}[\omega] + (\mathbb{E}[\omega]-\delta)^2$, allora $\delta_a^\star = \mathbb{E}[\omega] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{5}$.

(b) Si verifica facilmente che $K_{va}[W_\delta^b] = \mathbb{E}[W_\delta^b] = \frac{B(\alpha-1,\beta-1)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (\omega-\delta)^2 p'(\omega) d\omega$, con $p'(\omega)$ funzione di densità di una v.a. Beta$(\alpha-1,\beta-1)$. L'integrale (ovvero $K_{va}[W_\delta^b]$) è quindi minimizzato da $\delta_b^\star = \mathbb{E}'[w] = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} = \frac{1}{3}$, valore atteso della Beta$(\alpha-1,\beta-1)$.

(c)
- $K_{va}[W^a_{\delta_a^\star}] = \mathbb{V}[\omega] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{25}$.
- $K_{va}[W^a_{\delta_b^\star}] = \mathbb{V}[\omega] + (\mathbb{E}[\omega]-\delta_b^\star)^2 = \mathbb{V}[\omega] + (\delta_a^\star - \delta_b^\star)^2 = \frac{1}{25} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 = 0.0\overline{4}$.

18. Sia $\Delta = \Omega = I\!R^+$. Si assuma che, $\forall \delta \in \Delta$, la funzione di perdita della decisione sia definita da $W_\delta(\omega) = (\omega - \delta)^2$. Si consideri inoltre, per gli stati di natura, la funzione di densità $p(\omega) = \text{Gamma}(\omega|\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta \in I\!R^+$.

   (a) Tracciare il grafico di $W_{\delta_1}(\omega)$ e $W_{\delta_2}(\omega)$ al variare di $\omega \in I\!R^+$ per le decisioni $\delta_1 = 0$ e $\delta_2 = 1$.

   (b) Determinare i valori di ω per i quali $\delta_1 \succ \delta_2$ e il valore $\overline{\omega}$ di ω per il quale δ_1 e δ_2 hanno la stessa perdita.

   (c) Determinare, per una generica $\delta \in \Delta$, l'espressione di $K_{va}[W_\delta]$ (in funzione di δ, α e β).

   (d) Determinare $\Omega_0 = \{\omega \in I\!R^+ : \ W_{\delta_1}(\omega) \leq 1\}$ e calcolare il valore di $\mathbb{P}[\Omega_0]$ che si ottiene ponendo $\alpha = 1$ in $p(\omega)$.

Soluzione.

(a) Usare

```
curve(x^2, xlab=expression(omega), ylab="")
curve((x-1)^2, lty=2, add=TRUE)
```

(b) $W_{\delta_1}(\omega) \leq W_{\delta_2}(\omega) \ \Leftrightarrow \ \omega^2 \leq (\omega - 1)^2 \ \Leftrightarrow \ \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; si ha l'uguaglianza per $\overline{\omega} = \frac{1}{2}$.

(c) $K_{va}[W_\delta] = \mathbb{E}[(\omega \pm \mathbb{E}[\omega] - \delta)^2] = \mathbb{V}[\omega] + (\mathbb{E}[\omega] - \delta)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \left(\delta - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2$

(d) $W_{\delta_1}(\omega) \leq 1 \ \Leftrightarrow \ \omega^2 \leq 1 \ \Leftrightarrow \ \omega \in [0, 1] = \Omega_0$.
Quindi, poichè $p(\omega) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\omega^{\alpha-1}e^{-\beta\omega}$, $\omega \geq 0$, abbiamo che, per $\alpha = 1$,
$\mathbb{P}[\Omega_0] = \int_0^1 p(\omega)d\omega = \int_0^1 \beta e^{-\beta\omega}d\omega = 1 - e^{-\beta}$.

19. Sia $\Delta = \Omega = I\!R^+$. Si assuma che, $\forall \delta \in I\!R^+$, la funzione di perdita della decisione sia definita da $W_\delta(\omega) = |\omega - \delta|$. Considerare $\delta_0 = 1$.

   (a) Rappresentare graficamente in un sistema cartesiano il grafico di $W_{\delta_0}(\omega)$.

   (b) Determinare (con una relazione in funzione di ω) l'espressione di $H_{\delta_0}(\lambda) = \{\omega \in \Omega : W_{\delta_0}(\omega) \geq \lambda\}$, $\lambda > 0$ e rappresentare l'insieme graficamente.

   (c) Si consideri la funzione di densità $p(\omega) = \text{Gamma}(\omega|1, \beta)$ per gli stati di natura del problema in esame. Determinare l'espressione del criterio della soglia critica per la decisione δ_0 assumendo $\lambda = 1$.

Soluzione.

(a) Procedere analiticamente e verificare con

```
curve(abs(x-1),xlim=c(0,2),xlab=expression(theta),ylab="")
```

(b) Distinguiamo due casi.
CASO A: $\lambda \in [0,1]$
$|\omega - 1| \geq \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \leq 1-\lambda, & \omega \leq 1 \\ \omega \geq 1+\lambda, & \omega \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \in [0, 1-\lambda] \cup [1+\lambda, \infty)$
CASO B: $\lambda \geq 1$
$|\omega - 1| \geq \lambda \Leftrightarrow \omega \in [1+\lambda, +\infty)$
Quindi $H_{\delta_0}(\lambda) = \begin{cases} \omega \in [0, 1-\lambda] \cup [1+\lambda, +\infty), & 0 < \lambda \leq 1 \\ \omega \in [1+\lambda, +\infty), & \lambda \geq 1 \end{cases}$

(c) $H_{\delta_0}(1) = [2, +\infty)$. Quindi
$K_{sc}[W_{\delta_0}] = \mathbb{P}[W_{\delta_0}(\omega) \geq 1] = \mathbb{P}[\omega \in H_{\delta_0}(1)] = \int_2^{\infty} p(\omega) d\omega = 1 - \mathbb{F}(2)$, con $\mathbb{F}(\cdot)$ funzione di ripartizione della v.a. $\text{Ga}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$.
Con R: $K_{sc}[W_{\delta_0}] = 1 - \texttt{pgamma}(2, \texttt{alpha}, \texttt{rate} = \texttt{beta})$.

20. Sia $\Delta = \Omega = I\!R^+$. Si assuma che, $\forall \delta \in I\!R$, la funzione di perdita della decisione sia definita da $W_\delta(\omega) = (\omega - \delta)^2$. Si consideri inoltre la distribuzione a priori $p(\omega)$ una densità $\text{Gamma}(2, 1)$.

(a) Tracciare il grafico di $W_{\delta_1}(\omega)$ e $W_{\delta_2}(\omega)$ (al variare di $\omega \in I\!R^2$) per le decisioni $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$.

(b) Determinare i valori di ω per i quali $\delta_1 \succ \delta_2$ e il valore di ω per il quale δ_1 e δ_2 hanno la stessa perdita.

(c) Determinare $\Omega_0 = \{\omega \in I\!R : \quad W_{\delta_1}(\omega) \geq W_{\delta_2}(\omega)\}$ e rappresentare l'insieme graficamente.

(d) Calcolare il valore di $\mathbb{P}[\Omega_0]$.

(e) Calcolare il valore del criterio del valore atteso per le due decisioni δ_1 e δ_2 e dire quale delle due decisioni risulta preferibile.

Soluzione.

(a) Procedere analiticamente e verificare con

```
W.fun=function(w){(w-d)^2}
d=1
curve(W.fun(x),from=0,to=4,xlab=expression(theta),ylab="")
d=2
curve(W.fun(x),add=TRUE,lty=2)
```

(b) $W_{\delta_1}(\omega) = W_{\delta_2}(\omega) \Leftrightarrow (\omega - 1)^2 = (\omega - 2)^2 \Leftrightarrow \omega = \overline{\omega} = \frac{3}{2}$.
$W_{\delta_1}(\omega) < W_{\delta_2}(\omega) \Leftrightarrow \omega \in [0, \overline{\omega}]$.

(c) $\Omega_0 = [\overline{\omega}, +\infty)$, con $\overline{\omega} = \frac{3}{2}$.

(d) $\mathbb{P}[\Omega_0] = \int_{\overline{\omega}}^{\infty} p(\omega) d\omega = 1 - \mathbb{F}(\overline{\omega})$, dove $\mathbb{F}(\cdot)$ è la funzione di ripartizione della Ga$(2, 1)$.
Con `R`: $\mathbb{P}[\Omega_0] =$ `1 - pgamma(3/2,2,1)=0.557`.

(e) Sappiamo che $K_{va}[W_\delta] = \mathbb{V}[\omega] + (\delta - \mathbb{E}[\omega])^2$. Poichè in questo caso $\mathbb{E}[\omega] = \mathbb{V}[\omega] = 2$, abbiamo che
$K_{va}[W_{\delta_1}] = 2+1 = 3$ e $K_{va}[W_{\delta_2}] = 2+0 = 2$. È quindi preferibile δ_2, trattandosi, ovviamente, della decisione ottima, in quanto $\delta_2 = \mathbb{E}[\omega]$.

21. Sia $S_\Delta = \{(x, y) : \; 1 \le x \le 2, \; 1 < y < 2\}$. Si verifichi che Δ^+ e S_{B^+} sono vuote e che S_B non lo è.

Soluzione.

Tracciare a mano e verificare con `R`

```
plot(2, 2, col = "white", xlab = "", ylab = "",xlim=c(0,3),ylim=c(0,3))
segments(x0 = 1, y0 = 1, x1 =2, y1 = 1, col = "darkgreen", lty=2)
segments(x0 = 1, y0 = 2, x1 =2, y1 = 2, col = "darkgreen",lty=2)
segments(x0 = 1, y0 = 1, x1 =1, y1 = 2, col = "darkgreen")
segments(x0 = 2, y0 = 1, x1 =2, y1 = 2, col = "darkgreen")
text(1,0.7,expression(A),cex=0.8)
text(2,0.7,expression(C),cex=0.8)
text(2,2.3,expression(D),cex=0.8)
text(1,2.3,expression(E),cex=0.8)
```

S_Δ è il rettangolo $ACDE$, esclusi i segmenti tratteggiati.
Pertanto: $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = \emptyset$ e $S_B = \overline{AE}$ (estremi esclusi).

22. Assumendo che $S_\Delta = \{(x, y) : \; 1 \le x \le 2, \; 1 < y < 3\}$, determinare graficamente e analiticamente gli insiemi S_Δ, S_{Δ^+}, S_{B^+} e S_B.

Soluzione.

Analogo al precedente

23. Sia $S_\Delta = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ 2 \le y \le 3\}$. Rappresentare graficamente gli insiemi S_Δ, S_{B^+} e $S_{\Delta^\star_m}$ (dove K_m indica il criterio del minimax).

Soluzione.

Tracciare a mano e verificare con:

```
plot(2, 2, col = "white", xlab = "", ylab = "",xlim=c(0,1.5),ylim=c(1,4))
segments(x0 = 0, y0 = 2, x1 =1, y1 = 2, col = "darkgreen")
segments(x0 = 0, y0 = 3, x1 =1, y1 = 3, col = "darkgreen")
segments(x0 = 0, y0 = 2, x1 =0, y1 = 3, col = "darkgreen")
segments(x0 = 1, y0 = 2, x1 =1, y1 = 3, col = "darkgreen")
text(0,1.7,expression(A),cex=0.8)
text(1,1.7,expression(C),cex=0.8)
text(1,3.3,expression(D),cex=0.8)
text(0,3.3,expression(E),cex=0.8)
```

S_Δ coincide con il rettangolo $ACDE$; $S_{B^+} = A$, $S_{\Delta^\star_m} = \overline{AC}$.

24. Sia $S_\Delta = \{(x,y) : 1 \le x < 2, \ 1 < y < 3\}$. determinare graficamente le classi S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+}.

Soluzione. $S_\Delta = ACDE$ con $A = (1,1)$, $C = (2,1)$, $D = (2,3)$, $E = (1,3)$; i lati sono tutti esclusi, eccetto $\overline{AE}$; tutti i vertici sono esclusi. Pertanto: $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = \emptyset$ e $S_B = \overline{AE}$ (esclusi i punti A ed E).

25. Sia $S_\Delta = \{(x,y) : 1 < x < 2, 1 \le y \le 2\}$. Determinare graficamente le classi S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+}.

Soluzione. $S_\Delta = ACDE$ con $A = (1,1)$, $C = (2,1)$, $D = (2,3)$, $E = (1,3)$; i lati $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ non sono inclusi; tutti i vertici sono esclusi. $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = \emptyset$ (in quanto $A \notin S_\Delta$); $S_B = \overline{AC}$, esclusi i punti A e C che non appartengono a S_Δ.

26. Assumendo che $S_\Delta = \{(x,y) : \ 2 < x \le 3, \ 1 \le y < 4\}$, determinare graficamente e analiticamente gli insiemi S_Δ, S_{Δ^+}, S_{B^+} e S_B.

Soluzione. $S_\Delta = ACDE$ con $A = (2,1)$, $C = (3,1)$, $D = (3,4)$, $E = (2,4)$; i lati $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ non sono inclusi; tutti i vertici sono esclusi, tranne C. $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = \emptyset$ (in quanto $A \notin S_\Delta$); $S_B = \overline{AC}$, escluso il punto A.

27. Sia $S_\Delta = \{(x,y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$.

(a) Disegnare l'insieme S_Δ e indicare nel grafico l'insieme S_{Δ^+}.

(b) Stabilire se la decisione che corrisponde al punto di coordinate $(0,2)$ è ammissibile. (Giustificare la risposta).

(c) Individuare gli insiemi S_B e S_{B^+}.

(d) Indicare il punto di ottimo rispetto a criterio del minimax e calcolare il valore che in questo punto il criterio assume.

(e) Si considerino per gli stati di natura le probabilità $p_1 = \frac{2}{3}$ e $p_2 = \frac{1}{3}$ e indicare graficamente il punto corrispondente alla decisione ottima rispetto al criterio del valore atteso.

(f) Determinare l'equazione del fascio di rette che individua i luoghi di equivalenza per il criterio del valore atteso.

Soluzione.

(a) S_Δ è il cerchio di centro $(1, 1)$ e raggio unitario; la circonferenza è inclusa (in quanto le disuguaglianze sono del tipo $\leq$). S_{Δ^+} è l'arco AC del cerchio, con $A = (0, 1)$ e $C = (1, 0)$ (inclusi).

(b) Il punto $(0, 2)$ non appartiene all'arco AC e quindi non corrisponde a una decisione ammissibile.

(c) S_B= arco AC (estremi inclusi); S_{B^+}= arco AC (estremi esclusi, in quanto le tangenti in A e C sono le rette parallele agli assi, che corrispondono alle distribuzioni di probabilià degeneri).

(d) Ottimo criterio minimax: intersezione tra cerchio e retta bisettrice del primo quadrante $x_2 = x_1$. Dal sistema si trova il punto $P = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$. Il valore del criterio è $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

(e) Ottimo criterio valore atteso: punto di tangenza all'arco AC della retta r_T, appartenente al fascio improprio $x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + c$. Con $p_1 = 2/3$ e $p_2 = 1/3$, l'equazione delle rette del fascio è $x_2 = -2x_1 + c$.

(f) $x_2 = -2x_1 + c$.

28. Si consideri l'insieme $S_\Delta = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, y \geq x^2, y \leq 2\}$. Determinare gli insiemi S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+}.

Soluzione.

Determinare l'insieme analiticamente. Verificare con R:

```
curve(x^2,from=0,to=2,xlab=expression(x), ylab=expression(y))
abline(v=1)
abline(h=2)
```

S_Δ è costituito dall'insieme di vertici ACD, con $A = (1, 1)$, $C = (\sqrt{2}, 2)$, $D = (1, 2)$. La frontiera è inclusa. Abbiamo quindi che: $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = A$; $S_B = \overline{AD}$ (estremi inclusi).

29. Sia $S_\Delta \subseteq I\!R^2$ l'insieme del primo quadrante limitato superiormente dalla retta $y = 2$ e inferiormente dalla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 2$ (frontiera inclusa).

a. Rappresentare graficamente S_Δ, S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} (indicando le coordinate degli estremi degli insiemi).

b. Determinare $S_{\Delta^\star_m}$ (K_m indica il criterio del minimax).

Soluzione.

(a) Determinare analiticamente il grafico e verificare con R:

```
parabola.fun=function(x){x^2-2*x+2}
curve(parabola.fun(x),from=0,to=2,ylab=expression(y), ylim=c(0,2.8))
abline(h=2)
abline(a=0,b=1)
```

S_Δ è costituito dall'insieme di vertici V, A, C, con $V = (1, 1)$ (vertice della parabola), $A = (0, 2)$, $C = (2, 2)$. La frontiera è inclusa.
$S_{\Delta^+} = S_B$ arco AV (con V incluso); $S_{B^+} =$ arco AV (con V escluso).

(b) Criterio minimax. Dal grafico si evince che $S_{\Delta^\star_m}$ è costituito da un solo punto P_m. Tale punto che corrisponde all'ottimo minimax è l'intersezione tra la retta bisettrice $y = x$ e l'arco AV della parabola. Dal sistema si trova $P_m = (1, 1)$.

30. Sia $S_\Delta \subseteq I\!R^2$ l'insieme del primo quadrante limitato inferiormente dalla retta $y = 1$ e superiormente dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 1$ (frontiera inclusa).

(a) Rappresentare graficamente S_Δ, S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} (indicando le coordinate dei punti che delimitano l'insieme).

(b) Determinare graficamente l'insieme $S_{\Delta^\star_m}$ (dove K_m indica il criterio del minimax) e indicare le coordinate dei punti che delimitano tale insieme.

Soluzione.

(a) Determinare analiticamente il grafico e verificare con R:

```
parabola.fun=function(x){- x^2+4*x+1 }
curve(parabola.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(0,5.5), ylab=expression(y))
abline(h=1)
abline(coef=c(0,1))
```

La parabola ha concavità rivolta verso il basso. L'insieme S_Δ ha vertici con coordinate $A = (0, 1)$ (intersezione parabola e retta $x = 0$), $C = (4, 1)$ (intersezione parabola e retta $y = 1$) e $V = (2, 5)$ (vertice della parabola). Quindi: $S_{\Delta^+} = S_{B^+} = A$; $S_B = \overline{AC}$ (estremi inclusi).

(b) Ottimo minimax: è il segmento AP_m dove $P_m \in S_\Delta$ è il punto di intersezione tra segmento $\overline{AC}$ della retta $y = 1$ e la retta bisettrice $y = x$, ovvero $P_m = (1, 1)$.

31. Sia $S_\Delta \subseteq I\!R^2$ l'insieme del primo quadrante limitato superiormente dalla retta $y = 1$ e inferiormente dalla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$ (frontiera inclusa).

(a) Rappresentare graficamente S_Δ, S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} (indicando le coordinate dei punti che deliminano l'insieme).

(b) Tra i seguenti punti di $I\!R^2$, stabilire quali indicano decisioni e quali decisioni ammissibili: $P_1 = (1/2, 1/4)$,$P_2 = (1/2, 1)$, $P_3 = (1/2, 2)$, $P_4 = (3/2, 1/4)$.

(c) Determinare la decisione ottima rispetto al criterio del minimax.

Soluzione.

(a) Determinare analiticamente il grafico e verificare con R:

```
parabola.fun=function(x){x^2 - 2*x + 1}
curve(parabola.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(0,5.5), ylab=expression(y))
abline(h=1)
```

L'insieme S_Δ ha vertici $A = (0, 1)$ (intersezione parabola e retta $x = 0$), $C = (2, 1)$ (intersezione parabola e retta $y = 1$) e $V = (1, 0)$ (vertice della parabola). Quindi:
$S_{\Delta^+} = S_B$ arco AV (estremi inclusi); $S_{B^+} =$ arco AV, con V escluso (ha tangente $x = 0$, corrispondente a distribuzione degenere) e A incluso.

(b) $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in S_{\Delta^+} \subset S_\Delta$; $P_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \in \overline{AC} \subset S_\Delta$; $P_3 = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \notin S_\Delta$; $P_4 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) \in$ arco $VC \subset S_\Delta$;

(c) Ottimo minimax: è il punto $P_m \in S_\Delta$, intersezione tra arco AV della parabola e retta bisettrice $y = x$, ovvero $P_m = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

32. Sia S_Δ il sottoinsieme del primo quadrante di $I\!R^2$ delimitato superiormente dalla retta di equazione $y = 3$ e inferiormente dalla parabola γ di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ (frontiera inclusa).

(a) Determinare le coordinate del vertice V della parabola e dei punti A e C di intersezione tra la retta e la parabola e rappresentare graficamente l'insieme S_Δ.

(b) Considerare la distribuzione di probabilità $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$ e determinare il luogo geometrico F di equivalenza (fascio improprio di rette) in cui il criterio del valore atteso assume il generico valore $k \geq$.

(c) Verificare che il punto $P = (1, 2)$ appartiene alla parabola, determinare l'equazione della retta del fascio improprio F passante per P.

(d) Determinare il valore β del criterio del valore atteso in P.

(e) Determinare graficamente l'insieme di punti di S_Δ in cui il criterio del minimax K_m assume il valore 3 e individuare in questo sottoinsieme, se esistono, punti corrispondenti a decisioni ammissibili.

(f) Determinare graficamente e analiticamente l'insieme $\Delta^*(K_m)$ e il valore del criterio in corrispondenza della decisione ottima.

(g) Determinare gli insiemi S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} (graficamente e analiticamente, ovvero indicare le coordinate dei punti che rappresentano segmenti/archi rilevanti).

Soluzione.

(a) Determinare analiticamente il grafico e verificare con `R`:

```
parabola.fun=function(x){x^2 - 4*x + 5 }
curve(parabola.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(0,5), ylab=expression(y))
abline(h=3)
```

L'insieme S_Δ ha vertici $A = (2-\sqrt{2}, 3)$ (intersezione parabola e retta $y = 3$), $C = (2+\sqrt{2}, 3)$ (intersezione parabola e retta $y = 3$) e $V = (2, 1)$ (vertice della parabola).

(b) Il luogo geometrico richiesto coincide con l'intersezione tra S_Δ e le rette del fascio improprio $r_k: \ y = -x + k, \ k \in \mathbb{R}^+$ (il coefficiente angolare è $m = p_1/p_2 = 1$).

(c) Sostituendo in $y = x^2 - 4x + 5$ il valore $x = 1$ si ottiene $y = 2$ e quindi $P \in \gamma$.

(d) $\beta = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = \frac{3}{2}$.

(e) Il punto di intersezione tra γ e $x = 3$ è $E = (3, 2)$. Indichiamo con $D = (3, 3)$ il punto sulla bisettrice $y = x$ a cui corrisponde una decisione con $K_m = 3$. L'inseme richiesto è quindi costituito dai punti che appartengono ai segmenti $\overline{DE}$ e $\overline{AD}$.

(f) Ottimo minimax: punto P_m di intersezione tra arco AV di γ e retta $y = x$. Si trova $P_m = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(g) $S_{\Delta^+} = S_B$ arco AV vertici inclusi; $S_{B^+} =$ arco AV, vertice V escluso.

33. Sia $S_\Delta = \{A, C, D, E\}$ l'insieme di punti di coordinate $A = (\frac{1}{2}, 1)$, $C = (1, 2)$, $D = (3, \frac{1}{2})$ e $E = (2, \frac{6}{5})$ (frontiera inclusa).

(a) Rappresentare graficamente l'insieme S_Δ e determinare le classi S_{Δ^+} e S_B.

(b) Determinare l'equazione della retta r_{AD} rispetto alla quale i due punti sono contemporaneamente ottimi rispetto al criterio del valore atteso e l'equazione del fascio improprio di rette al quale appartiene r_{AD}.

(c) Determinare il valore β del criterio del valore atteso per i punti della retta r_{AD}.

(d) Determinare la decisione ottima per il criterio minimax.

Soluzione.

(a) S_Δ è costituito dal quadrilatero di vertici $ACDE$ che si rappresenta facilmente. $S_{\Delta^+} = S_B = \overline{AD}$.

(b) Con le condizioni di passaggio della retta generica $y = mx + q$ per A e D si ottiene $m = -\frac{1}{5}$ e $q = \frac{11}{10}$ e quindi $r_{AD}: \ y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{10}$.

(c) Criterio del valore atteso: determiniamo β considerando l'intersezione tra retta r_{AD} e la retta $y = x$. Tale punto ha coordinate $\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}\right)$ e quindi $\beta = \frac{11}{12}$.

(d) Criterio del minimax: troviamo P_m come intersezione tra retta r_{AD} e retta $y = x$. Si ottiene $P_m = \left(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}\right)$ (coincidente con l'ottimo del criterio del valore atteso).

34. Sia S_Δ il sottoinsieme del primo quadrante di $I\!R^2$ ottenuto dall'intersezione tra il quadrante inferiore del punto $C = (2, 2)$ e il cerchio delimitato dalla circonferenza di equazione $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ (frontiera inclusa).

(a) Rappresentare graficamente l'insieme S_Δ.

(b) Individuare gli insiemi S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} (graficamente e analiticamente, ovvero indicare coordinate di punti che rappresentano segmenti/archi rilevanti).

(c) Determinare la decisione ottima rispetto al criterio del minimax e il valore che il criterio assume in corrispondenza di questa decisione (metodo geometrico).

(d) Considerare la distribuzione di probabilità $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ e determinare il valore m per il fascio di rette improprio corrispondente, di equazione $y = mx + q$.

(e) Determinare il valore del criterio del valore atteso nel punto di ottimo individuato con il criterio del minimax.

Soluzione.

(a) $C = (2, 2)$ è il centro del cerchio delimitato dalla circonferenza in esame, che ha raggio unitario. S_Δè quindi il quarto di cerchio corrispondente all'arco di circonferenza delimitato dai punti $A = (1, 2)$ e $D = (2, 1)$, ottenuti dall'intersezione della frontiera del quadrante inferiore di C con la circonferenza.

(b) $S_{\Delta^+} = S_B =$ arco AD, estremi inclusi; $S_{B^+} =$ arco AB, estremi esclusi.

(c) Ottimo minimax: è il punto $P_m = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ che si ottiene dall'intersezione tra la circonferenza e la retta bisettrice $y = x$. Si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} x = y \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$, ovvero l'equazione $2(x-2)^2 = 1$.

(d) $m = -\frac{p_1}{p_2} = -1$. Il fascio di rette è quindi $y = -x + q$, $q \in \mathbb{R}$.

(e) Poichè $p_1 = p_2 = 1$, il valore del criterio del valore atteso coincide con il valore delle coordinate di P_m.

35. Sia S_Δ il sottoinsieme di $I\!R^2$ del primo quadrante delimitato superiormente dalla retta di equazione $y = 3$ e inferiormente dalla parabola γ di equazione $y = x^2 - 4x + 1$ (frontiera inclusa).

(a) Determinare le coordinate dei vertici di S_Δ.

(b) Individuare gli insiemi $S_{\Delta+}$, S_B e S_{B+}.

(c) Determinare l'equazione della retta r_t tangente alla parabola in T di ascissa $x_t = 1/4$.

(d) Determinare il valore del criterio K_{va} per i punti di r_t.

(e) Determinare le coordinate del punto corrispondente alla decisione ottima rispetto al criterio K_m (minimax).

(f) Determinare, al variare di $k \geq 0$, gli insiemi dei punti di S_Δ per i quali $K_m = k$.

(g) Per gli insiemi di decisioni determinati al punto precedente indicare gli eventuali sottoinsiemi di decisioni ammissibili.

Soluzione.

(a) Ottenere il grafico analiticamente. La parabola ha concavità rivolta verso l'alto e vertice in $V = (2, -3)$. L'insieme S_Δ ha i seguenti vertici: $A = (2 - \sqrt{3}, 0)$, $E = (2 + \sqrt{3}, 0)$ (intersezioni tra asse $y = 0$ e γ), $D = (2 + \sqrt{6}, 3)$ (intersezione tra retta $y = 3$ e γ), $C = (0, 3)$ e $F = (0, 1)$ (intersezione tra asse $x = 0$ e γ). Verificare con:

```
parabola.fun=function(x){x^2-4*x+1 }
curve(parabola.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(-4,4))
abline(h=3)
abline(v=0)
abline(h=0)
```

(b) $S_{\Delta+} = S_{B+} =$ arco AF estremi inclusi. S_B è l'unione dei segmenti CF, AE e arco AF (estremi inclusi).

(c) La retta tangente alla parabola di equazione generica $y = ax^2 + bx + c$ nel punto $T = (x_t, y_t)$ ha coefficiente angolare $m_t = 2ax_t + b$. In questo caso, $m_t = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} - 4 = -\frac{7}{2}$. Il fascio di rette è quindi $y = -\frac{7}{2}x + q$, $q \in \mathbb{R}$. Il valore di q si determina con la condizione di passaggio della retta nel punto di coordinate (x_t, y_t), con $y_t = x_t^2 - 4x_t + 1$, ovvero per il punto di coordinate $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. Si ottiene $q_t = \frac{15}{16}$ e quindi: $r_t :\ y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{16}$.

(d) Per determinare il valore del criterio del valore atteso per i punti di r_t basta trovare le coordinate del punto di intersezione tra r_t e la retta tangente $y = x$. Si ottiene il valore $\frac{5}{24}$.
Ottimo minimax: il punto si ottiene dall'intersezione tra l'arco AF della parabola γ e la bisettrice $y = x$. Si ottiene $P_m = \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$. Il valore di K_m è quindi $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

36. Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ e S_Δ la regione del primo quadrante di un riferimento cartesiano delimitata dai grafici delle curve di equazione

$$y = -x + 4, \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{x}.$$

(a) Determinare le coordinate dei punti A e C in cui i grafici delle due funzioni si intersecano e rappresentare graficamente l'insieme S_Δ.

(b) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme S_{Δ^+}, ovvero l'insieme dei punti di S_Δ corrispondenti alle decisioni ammissibili.
(c) Determinare le coordinate del punto P_m, corrispondente alla decisione ottima rispetto al criterio K_m (minimax) e il valore del criterio in quel punto.
(d) Determinare l'equazione della retta r per la quale il punto P_m è anche ottimo rispetto al criterio del valore atteso.
(e) Determinare il valore del criterio del valore atteso in P_m (utilizzando r).

Soluzione.

(a) Disegnare a mano e verificare con

```
retta.fun=function(x){-x+4}
iperbole.fun=function(x){1/x}
curve(iperbole.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(0,6),ylab="")
curve(retta.fun(x),add=TRUE)
```

I punti di intersezione tra retta e iperbole sono $A = \left(2-\sqrt{3}, \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$ e $C = \left(2+\sqrt{3}, \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$.

(b) $S_{\Delta^+} =$ arco AC dell'iperbole, estremi inclusi.

(c) Ottimo minimax: il punto P_m ha coordinate uguali che si ottengono dall'intersezione tra l'arco AC dell'iperbole e la retta bisettrice $y = x$. Si ha quindi che $P_m = (1, 1)$. Il valore del criterio del minimax in tale punto è pari a 1.

(d) Dobbiamo trovare l'equazione della retta $r_t : \quad y = m_t x + q_t$ tangente in $(1, 1)$ alla curva $y = f(x) = \frac{1}{x}$ (nel primo quadrante). Abbiamo quindi che $m_t = \frac{d}{x} f(dx)|_{x=x_t} = -\frac{1}{x^2}|_{x=1} = -1$, da cui $r_t = -x + q_t$. Il valore di q_t si trova dalla condizione di passaggio per $(1, 1)$. Si ha $q_t = 2$ e quindi $r_t : \; y = -x + 2$.

(e) Il valore del criterio del valore atteso in $P_t = (1, 1)$ è pari a 1, qualunque sia la distribuzione (p_1, p_2) utilizzata. Si noti che $m_t = -1 \;\Rightarrow\; p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Si noti anche che P_m è il punto di intersezione tra r_t e la bisettrice $y = x$.

37. Sia S_Δ il sottoinsieme di $I\!R^2$ delimitato dalla parabola $y = x^2 - 2x + 1$ e la retta $y = 2$ (frontiera inclusa).

(a) Rappresentare graficamente S_Δ e l'insieme dei punti-decisione ammissibili S_{Δ^+}.
(b) Determinare il punto ottimo rispetto al criterio del minimax.
(c) Considerare il fascio improprio di rette $y = -x + k$, $k > 0$. Determinare il valore di k in corrispondenza del quale il criterio del valore atteso è minimizzato e determinare le coordinate della decisione ottima.
(d) Determinare e rappresentare gli insiemi S_B e S_{B^+}.

Soluzione.

(a) Disegnare a mano e verificare con:

```
parabola.fun=function(x){x^2-2*x+1}
curve(parabola.fun,from=0,to=4,ylim=c(0,2.5))
abline(h=2)
abline(v=0)
```

La superficie S_Δ ha tre punti notevoli: $V = (1, 0)$, vertice della parabola; $A = (0, 1)$, intersezione tra la parabola e la retta $x = 0$; $C = (0, 2)$.
S_{Δ^+} = arco AV, estremi inclusi.

(b) Ottimo minimax: si trova come intersezione tra la parabola e $y = x$. Si ottiene $P_m = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(c) Dobbiamo determinare k in modo tale che $y = -x+k$ sia tangente della parabola. Dobbiamo quindi determinare il valore k che verifica la condizione di tangenza ovvero per il quale si annulla il discriminante dell'equazione risolvente associata al sistema $\begin{cases} y = -x + k \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$. L'equazione risolvente è $x^2 - x + (1 - k) = 0$, il cui discriminate risulta essere $1 - 4(1 - k)$, che è uguale a zero per $k = \frac{3}{4}$. La retta tangente del fascio è quindi $r_t : \ y = -x + \frac{3}{4}$.
Il punto di tangenza (ottimo rispetto al criterio del valore atteso) è l'intersezione tra retta r_t e parabola, e coordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

(d) S_B è dato dall'unione dell'arco AV e del segmento AC; l'insieme S_{Δ^+} è dato dall'arco AV, vertice V escluso, A incluso.

38. Sia S_Δ formato dai 4 punti $A = (1, 2)$, $F = (2, 2)$, $C = (2, 4)$ e $D = (3, 1)$.

(a) Determinare graficamente gli insiemi S_Δ, S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+}.

(b) Determinare gli insiemi gli insiemi S_Δ, S_{Δ^+}, S_B e S_{B^+} che si ottengono considerando il triangolo ACD, frontiera inclusa. (NB: si tratta degli insiemi $S_{\tilde{\Delta}}$, $S_{\tilde{\Delta}^+}$, $S_{\tilde{B}}$ e $S_{\tilde{B}^+}$ ottenuti per casualizzazione di Δ).

(c) Stabilire se il punto $E = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ corrisponde a una decisione appartenente a $\widetilde{S}_\Delta$ e a $\widetilde{B}^+$.

Soluzione.

(a) S_Δ è costituito dai quattro punti. Visualizzare con

```
plot(2, 2, col = "white", xlab = "", ylab = "",xlim=c(0,4),ylim=c(0,5))
points(c(1,2,2,3),c(2,2,4,1),type="p")
```

$S_{\Delta^+} \equiv S_B \equiv S_{B^+} \equiv \{A, D\}$ (sia F che C sono inammissibili).

(b) S_Δ coincide con il triangolo ABC.
$S_{\Delta^+} \equiv S_B \equiv S_{B^+} \equiv \overline{AD}$.

39. Si consideri il problema di decisione

$W_{\delta_j}(\omega_i)$	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
ω_1	1	1	2	3
ω_2	1	3	1/2	4

(a) Disegnare l'insieme S_Δ e l'insieme $S_{\widetilde{\Delta}}$ (spazio delle decisioni casualizzate).

(b) Determinare graficamente le classi S_{Δ^+} e $S_{\widetilde{\Delta}^+}$.

(c) Per la classe delle decisioni casualizzate, determinare graficamente la classe delle decisioni bayesiane $S_{\widetilde{B}}$.

Soluzione.

(a) S_Δ è costituito dai quattro punti $A = (1, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = \left(2, \frac{1}{2}\right)$, $E = (3, 4)$. Visualizzare con

```
plot(2, 2, col = "white", xlab = "", ylab = "",xlim=c(0,4),ylim=c(0,5))
points(c(1,1,2,3),c(1,3,0.5,4),type="p")
```

$S_{\widetilde{\Delta}}$ è costituito dal quadrilatero $ACDE$, lati e vertici inclusi.

(b) $S_{\Delta^+} \equiv \{A, D\}$; $S_{\widetilde{\Delta}^+} \equiv \overline{AD}$, estremi inclusi.

(c) $S_{\widetilde{B}} \equiv \overline{AD} \cup \overline{AC}$, estremi inclusi.

40. Sia S_Δ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato superiormente dalla retta di equazione $y = 1$ e inferiormente dalla parabola di equazione $y = (x - 1)^2$ (primo quadrante, frontiera inclusa). Si consideri la distribuzione di probabilità con $p_1 = 1/4$ e $p_2 = 3/4$.

(a) Rappresentare l'insieme S_Δ e determinare l'equazione $y = mx + q$ del fascio improprio di rette determinato dalla distribuzione assegnata.

(b) Determinare l'equazione della retta r_t del fascio, tangente alla parabola (ovvero: trovare il valore q_t di q che individua la retta tangente).

(c) Determinare le coordinate del punto P che corrisponde alla soluzione ottima rispetto al criterio del valore atteso.

(d) Determinare il valore del criterio del valore atteso la decisione corrispondente a P come valore atteso delle sue coordinate e verificare che tale valore coincide con le coordinate del punto di intersezione tra bisettrice del primo quadrante e la tangente della parabola in P.

Soluzione.

(a) Determinare S_Δ analiticamente e verificare con

```
parabola.fun=function(x){(x-1)^2 }
curve(parabola.fun,from=0,to=4,ylim=c(0,2.5), ylab="")
abline(h=1)
abline(v=0)
```

$m = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{3}$. Il fascio è quindi individuato da $y = -\frac{1}{3}x + q$, $q \in \mathbb{R}$.

(b) Il valore q_t della retta tangente si trova come soluzione dell'equazione che si ottiene imponendo che il discriminante dell'equazione risolvente del sistema $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + q \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ sia uguale a zero (condizione di tangenza retta-parabola). L'equazione risolvente è $3x^2 - 5x + 3(1-9)$; il discriminante è $25 - 36(1-q)$, che è uguale a zero per $q = q_t = \frac{11}{36}$. La retta tangente alla parabola del fascio è quindi $r_t:\ y = -\frac{1}{3} + \frac{11}{36}$.

(c) Il punto cercato è il punto di tangenza di r_t alla parabola. Si trova quindi risolvendo il sistema $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{36} \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$. Si verifica che il punto ha coordinate $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{36}\right)$.

(d) Il valore del criterio del valore atteso in P si può trovare in due modi:
(i) calcolando il valore atteso delle coordinate di P con pesi p_1 e p_2, ovvero $(\frac{5}{6})\frac{1}{4} + (\frac{1}{36})\frac{3}{4} = \frac{11}{48}$;
(ii) determinando le coordinate uguali del punto di intersezione tra r_t e $y = x$. Risolvendo il sistema, si verifica che l'intersezione tra r_t e $y = x$ si ha nel punto $\left(\frac{11}{48}, \frac{11}{48}\right)$.

41. Sia S_Δ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato superiormente dalla retta di equazione $y = -x + 4$ e inferiormente dal ramo di iperbole $y = 1/x$ (primo quadrante, frontiera inclusa). Si consideri la distribuzione di probabili'̂a con $p_1 = 1/3$ e $p_2 = 2/3$.

   (a) Rappresentare l'insieme S_Δ e determinare l'equazione $y = mx + q$ del fascio improprio di rette determinato dalla distribuzione assegnata.

   (b) Determinare l'equazione della retta r_t del fascio, tangente il ramo di iperbole del primo quadrante (ovvero: trovare il valore q_t di q che individua la retta tangente).

   (c) Determinare le coordinate del punto P che corrisponde alla soluzione ottima rispetto al criterio del valore atteso.

   (d) Determinare il valore del criterio del valore atteso per la decisione corrispondente al punto P come valore atteso delle coordinate di P e verificare che tale valore coincide con le coordinate del punto di intersezone tra bisettrice del primo quadrante e la tangente dell'iperbole in P.

Soluzione.

(a) Disegnare S_Δ a mano e verificare con

```
retta.fun=function(x){-x+4}
iperbole.fun=function(x){1/x}
curve(iperbole.fun(x),from=0,to=5,ylim=c(0,5))
curve(retta.fun(x),add=TRUE)
```

La retta e l'iperbole si intersecano nei punti $A = \left(2-\sqrt{3}, \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$ e $C = \left(2+\sqrt{3}, \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$.

(b) Equazione del fascio improprio con coefficiente angolare $m = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{2}$: $y = -\frac{1}{2}x + q$, $q \in \mathbb{R}$. Il valore q_t della retta tangente si trova come soluzione dell'equazione che si ottiene imponendo che il discriminante dell'equazione risolvente del sistema $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + q \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ sia uguale a zero (condizione di tangenza retta-iperbole). L'equazione risolvente è $x^2 - 2xq + 2 = 0$; il discriminante è $4q^2 - 8$, che è uguale a zero per $q = \pm\sqrt{2}$ (scegliamo $q = q_t = \sqrt{2}$ perchè consideriamo il ramo di iperbole del primo quadrante). La retta tangente al ramo di iperbole del primo quadrante è quindi $r_t:\ y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}$.

(c) Il punto P è il punto di tangenza di r_t all'iperbole. Le sue coordinate coincidono con le soluzioni del sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2} \end{cases}$. Si verifica che $P = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(d) Il criterio del valore atteso in P si può trovare in due modi:
(i) calcolando il valore atteso delle coordinate di P con pesi p_1 e p_2, ovvero $\sqrt{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
(ii) determinando le coordinate (uguali) del punto di intersezione tra r_t e $y = x$. Risolvendo il sistema, si verifica che l'intersezione tra r_t e $y = x$ si ha nel punto $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.