Laboratorio di decisioni statistiche - Lab. 10 – 2024-2025 - 4 dicembre 2024

Nome, cognome e matricola: ____________________

1. **AfE – stima intervallare, modello normale**

   Assumere che $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$, con $\mu_p = 1.9$ e $\sigma_p^2 = 0.095$. Sia $S_k = [\mu_p - k\sigma_p, \mu_p + k\sigma_p]$. Allora

   $$\mathrm{mis}(S) = 2k\sigma_p \qquad \text{and} \qquad \mathbb{P}[S|\mathbf{z}_n] = \Phi(k) - \Phi(-k).$$

   (a) Disegna il grafico di $\rho(S, \mathbf{z}_n) = b\mathrm{mis}(S) - \mathbb{P}(S|\mathbf{z}_n)$ in funzione di k nell'intervallo $[0, 4]$, ponendo $b = 1$.

   (b) Mostra che il valore ottimo di k è $k^* = 0.72$

   (c) Ottieni il corrispondente stimatore intervallare ottimo per θ.

   (d) Determina il valore di $\rho(S^*, \mathbf{z}_n)$

   (e) Ripeti per with $b = 0.5$.

2. **MC frequentista – calcolo di valore atteso e varianza**

   $X|\theta \sim \mathrm{N}(3, 2)$. Determinare con MC valore atteso e varianza di X e di $Y = e^X$.

3. **MC frequentista – stima puntuale 1**

   $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{Unif}[0, \theta]$ iid. Per lo stimatore $d(\mathbf{Z}_n) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$, verifica che, $\forall\theta > 0$, $\mathbb{E}[d(\mathbf{Z}_n)] = \theta$ e che $\mathbb{V}[d(\mathbf{Z}_n)] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$. Assumere: `M` $= 10000$, $n = 10$, `th.vero` $= 0.4$. Ripeti con `th.vero=3`.

4. **MC frequentista – stima puntuale 2**

   $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{Beta}(\theta, 1)$ iid, ovvero $p_\theta^X(x) = \theta x^{\theta-1},\ \theta > 0,\ x \in [0, 1]$. In questo caso $d_{mv}(\mathbf{Z}_n) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$. Verifica che d_{mv} è uno stimatore distorto di θ. Assumere che: `M` $= 10000$, `th.vero` $= 2$, $n = 10$.

5. **MC frequentista – simulazione di funzioni di rischio**

   Sia $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$. Assumere $n = 3$ e $M = 10000$ (per Monte Carlo).

   (a) Scrivere una funzione R che restituisca, al variare di θ, il valore dell'errore quadratico medio (ottenuto con MC) di ciascuno dei seguenti stimatori:

   $$d_1 = X_{(n)}, \qquad d_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}, \qquad d_3 = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}.$$

   (b) Tracciare i grafici delle funzioni errore quadratico medio per i tre stimatori per $\theta \in [0, 5]$ e stabilire la relazione di preferibilità tra i tre stimatori.

   (c) Ripetere con $n = 5, 10$.

   (d) Verificare analiticamente (a casa).