

Formula di Taylor

Calcolare i seguenti limiti:

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \sqrt{1+2x} - 1}{4x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \tan x}$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x \sin x^3}$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$

6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\tan x - x}$

7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + x^2 \log x}{\cos \sqrt{x} - 1}$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x - \frac{1}{x}}{\log(1 + e^{x^{-3}}) - \log 2}$

9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - 2 + 2 \cos x}{x \ln(1+x) - x^2}$

10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\ln(1+x) - x)}{x(e^x - 1) - 2 + 2 \cos x}$

11 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\operatorname{sen} x - x \cos x}}$

12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{\ln 10}{x} \right)^x - 10 \right],$

13 (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 2 \arcsin(\log(e - x^4))}{\pi - \arccos(x \sin x - \log(1 + x^2) - 1)},$

14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + \sin^2 x)^{\cotg x}] - x}{x^3}.$

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \log(1 + x^5)}{(\sqrt{1 + x^4} - 1)^2}$

16 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x),$ dove

$$f(x) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \operatorname{tg}^2 x}{x - \operatorname{tg} x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg}^2 x}$$

17 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \left(\log \left(1 + \frac{3}{t^2} \right) - 3 \operatorname{sen} \frac{1}{t^2} \right), \alpha \in \mathbb{R}.$

18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x - x^2)}{1 - e^{-x^2} - x^2}$

19 Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo di $f(x) = (x^2 + 3x + \arctg x)^5 \left(\exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right),$ per $x \rightarrow +\infty$ (qui $\exp(t) = e^t$).

20 Trovare la derivata sesta, nel punto $x = 0$, della funzione $f(x) = (1 + \sin^2 x)^{\cos x^2}.$ Fare la stessa cosa per la derivata 351-esima.

21 Si determini l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4}{x^3 + x},$$

$$g(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x^2 + \alpha x^4}{x^\alpha + x}, \text{ al variare di } \alpha > 0.$$

22 Calcolare l'ordine di infinitesimo o di infinito per $x \rightarrow 0^+$ della seguente funzione, al variare di $\alpha > 0:$ $\left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{-1 + \sqrt{1+x}} \right)^\alpha - 1$

23 Calcolare gli sviluppi di MacLaurin fino all'8° grado delle funzioni

$$f(x) = \ln(3 - 2e^{x^3}), \quad g(x) = \frac{\ln(3 - 2e^{x^3})}{1 - 2 \operatorname{sen} x^2}.$$

24 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \rightarrow 0^+:$

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad g(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x + x^6}{\sqrt{x}},$$

$$h(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}, \quad k(x) = x + x^2 \ln x.$$

25 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \rightarrow 0^+:$

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt[3]{x}}, \quad g(x) = x^3 - x^4 \ln x,$$

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^{3/2}}, \quad k(x) = \sqrt{4 + 2x^2} - 2.$$

26 Al variare del parametro reale α , trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0^+,$ della funzione

$$f_\alpha(x) = \ln(1 - \alpha x \operatorname{sen} x) - e^{-x^2} + 1;$$

27 (*)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) [\arctg \sqrt[3]{x+1} - \arctg \sqrt[3]{x-1}]$$

1 Risposte ad alcuni esercizi

- 1: $\frac{e}{2}$; 2: 1; 3: $\frac{1}{3}$; 4: $\frac{7}{12}$; 5: $-\frac{3}{2}$;
 6: $\frac{1}{2}$; 7: 1; 8: $-\frac{2}{3}$; 9: 0; 10: 0;
 11: $\sqrt{3}$; 12: $-5 \ln^2 10$; 14: $-\frac{7}{6}$; 15: 4;
 16: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{\pi}$;
 21: a) Si ha

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

quindi

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 = \frac{x^4}{2} + o(x^6) \sim \frac{x^4}{2}.$$

Poiché $x^3 + x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2x} = \frac{x^3}{2}.$$

Quindi f è un infinitesimo di ordine 3. Questa parte poteva essere svolta usando i limiti notevoli al posto della formula di Taylor.

b) Ragionando allo stesso modo si ottiene

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 \sim \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) x^4,$$

purché $\alpha \neq 1/2$. Inoltre si ha

$$x^\alpha + x \sim \begin{cases} x & \text{se } \alpha > 1 \\ 2x & \text{se } \alpha = 1 \\ x^\alpha & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto:

- se $\alpha \geq 1$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $0 < \alpha < 1$, con $\alpha \neq 1/2$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $4 - \alpha$;
- se $\alpha = 1/2$, i termini di ordine 4 nel numeratore si annullano, e bisogna scrivere il successivo termine dello sviluppo di Taylor:

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^{10}) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

da cui

$$g(x) \sim -\frac{x^8}{24x^\alpha} = -\frac{x^{15/2}}{24},$$

e $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{15}{2}$.

23:

Prima funzione: Si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^8) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$3 - 2e^{x^3} = 1 - 2x^3 - x^6 + o(x^8) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

D'altra parte

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0;$$

utilizzando quest'ultima formula con $t = -2x^3 - x^6 + o(x^8) \rightarrow 0$, e ricordando le proprietà degli "o piccoli", otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + (-2x^3 - x^6 + o(x^8))) = \\ &= (-2x^3 - x^6 + o(x^8)) - \frac{1}{2} \underbrace{(-2x^3 - x^6 + o(x^8))^2}_{=-2x^6 + o(x^8)} + \\ &+ \frac{1}{3} \underbrace{(-2x^3 - x^6 + o(x^8))^3}_{=o(x^8)} + o\left(\underbrace{(-2x^3 - x^6 + o(x^8))^3}_{=o(x^8)}\right) = \\ &= -2x^3 - 3x^6 + o(x^8). \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $P_8(x; f)$ di MacLaurin di grado 8 è l'unico tra i polinomi $p(x)$ di grado ≤ 8 tale che

$$f(x) = p(x) + o(x^8) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

se ne deduce che

$$P_8(x; f) = -2x^3 - 3x^6.$$

Seconda funzione: Dobbiamo cercare lo sviluppo di MacLaurin di

$$h(x) = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{sen} x^2}$$

e moltiplicarlo per quello ottenuto per f . Poiché lo sviluppo di f inizia con un termine di grado 3, basterà sviluppare $h(x)$ fino all'ordine 5. Si ha:

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi

$$2 \operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^8) = x^2 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

e prendendo in quest'ultima formula $t = 2x^2 + o(x^5) \rightarrow 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{1 - (2x^2 + o(x^5))} = \\ &= 1 + (2x^2 + o(x^5)) + \underbrace{(2x^2 + o(x^5))^2}_{=4x^4 + o(x^5)} + \\ &\quad + \underbrace{(2x^2 + o(x^5))^3}_{=o(x^5)} + \underbrace{o((2x^2 + o(x^5))^3)}_{=o(x^5)} = \\ &= 1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)h(x) = \\ &= (-2x^3 - 3x^6 + o(x^8)) \cdot (1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5)) = \\ &= -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8 + o(x^8). \end{aligned}$$

Dunque il polinomio cercato è

$$P_8(x; g) = -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8.$$

24:

Analisi di $f(x)$: Tenuto conto che, per $x \rightarrow 0^+$, $\ln x$ tende a $-\infty$, ma più lentamente di qualunque potenza negativa di x , si ottiene che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 2, ma di ordine superiore rispetto ad ogni numero minore di 2.

Analisi di $g(x)$: Osservato che

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi che

$$x - \text{sen } x + x^6 = \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

si ottiene che

$$g(x) = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\sqrt{x}} \sim \frac{x^{5/2}}{6},$$

quindi $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{5}{2}$.

Analisi di $h(x)$: Usando lo sviluppo

$$(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 + x^2)^{1/2} - (1 + x^2)^{1/3} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2), \end{aligned}$$

e quindi $h(x)$ è un infinitesimo di ordine 2.

Analisi di $k(x)$:

$$k(x) = x(1 + x \ln x).$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

ne segue che $k(x) \sim x$, quindi è un infinitesimo di ordine 1.

Quindi le quattro funzioni sono così ordinate in ordine crescente:

$$k(x), \quad f(x), \quad h(x), \quad g(x).$$

27: $\frac{2}{3}$;