

5 ANALISI VETTORIALE

In questo capitolo presentiamo i risultati che, tradizionalmente, costituiscono i principali risultati che vanno sotto il nome di analisi vettoriale. La trattazione è decisamente lacunosa, rispetto ad un testo tradizionale e per la difficoltà dei concetti da affrontare e per alcune idee ostiche che compaiono in alcune dimostrazioni. Per una presentazione più organica e completa rimandiamo ai molti e ottimi testi citati in bibliografia, in ogni caso desideriamo evidenziare la presenza (alla fine del capitolo) di alcuni risultati interessanti che, usualmente, non sono inclusi in un libro di analisi matematica, ma che possono arricchire ed essere utili.

5.1 Analisi vettoriale nel piano

TEOREMA 5.1 (FORMULE DI GAUSS-GREEN (G. GREEN)) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera regolare a tratti e A, B due funzioni di classe $C^1(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto contenente \bar{D} , allora vale

$$(5.1) \quad \int_D \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} B(x_1, x_2) dx_2 \quad \int_D \partial_2 A(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\partial^+ D} A(x_1, x_2) dx_1$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema supponendo che sia possibile descrivere il dominio nei seguenti due modi, cioè che esistano quattro funzioni continue e di classe C^1 a tratti tali che

$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (a, b), c(x_1) < x_2 < d(x_1)\} = \{(x_1, x_2) : a(x_2) < x_1 < b(x_2), x_2 \in (c, d)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Per dimostrare la tesi verificheremo direttamente l'uguaglianza degli integrali che compaiono in (5.1). Cominciamo dal primo integrale in due dimensioni. Grazie alle proprietà del dominio D e alle formule di riduzione degli integrali possiamo scrivere che

$$\int_D \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_c^d \left[\int_{a(x_2)}^{b(x_2)} \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 = \int_c^d [B(b(x_2), x_2) - B(a(x_2), x_2)] dx_2$$

e, analogamente, vale

$$\int_D \partial_2 A(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left[\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \partial_2 A(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = \int_a^b [A(x_1, d(x_1)) - A(x_1, c(x_1))] dx_1$$

L'integrale di linea richiede un po' di lavoro in più, infatti dobbiamo scrivere una parametrizzazione, regolare a tratti e correttamente orientata, del bordo. Per

quanto abbiamo ipotizzato su D possiamo affermare che $\partial^* D = \cup_{i=1}^4 \gamma_i = \cup_{i=1}^4 \eta_i$ dove gli archi regolari sono descritti dalle seguenti parametrizzazioni

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{\phi_1(t) = (t, c(t)) : t \in [a, b]\} & \phi_1'(t) &= (1, c'(t)) \\ \gamma_2 &= \{\phi_2(t) = (b, t) : t \in [c(b), d(b)]\} & \phi_2'(t) &= (0, 1) \\ \gamma_3 &= \{\phi_3(t) = (-t, d(-t)) : t \in [-b, -a]\} & \phi_3'(t) &= (-1, -d'(-t)) \\ \gamma_4 &= \{\phi_4(t) = (a, -t) : t \in [-d(a), -c(a)]\} & \phi_4'(t) &= (0, -1) \\ \eta_1 &= \{\psi_1(t) = (t, c) : t \in [a(c), b(c)]\} & \psi_1'(t) &= (1, 0) \\ \eta_2 &= \{\psi_2(t) = (b(t), t) : t \in [c, d]\} & \psi_2'(t) &= (b'(t), 1) \\ \eta_3 &= \{\psi_3(t) = (-t, d) : t \in [-b(d), -a(d)]\} & \psi_3'(t) &= (-1, 0) \\ \eta_4 &= \{\psi_4(t) = (a(-t), -t) : t \in [-d, -c]\} & \psi_4'(t) &= (-a'(-t), -1)\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di integrale di linea di una forma differenziale abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\partial^* D} A(x_1, x_2) dx_1 &= \sum_i \int_{\gamma_i} A(x_1, x_2) dx_1 = \int_a^b A(t, c(t)) dt - \int_{-b}^{-a} A(-t, d(-t)) dt = \int_a^b A(t, c(t)) dt + \int_b^a A(s, d(s)) ds = \int_a^b [A(t, c(t)) - A(t, d(t))] dt \\ \int_{\partial^* D} B(x_1, x_2) dx_2 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\eta_i} B(x_1, x_2) dx_2 = \int_c^d B(b(t), t) dt - \int_{-d}^{-c} B(a(-t), -t) dt = \int_c^d B(b(t), t) dt + \int_d^c B(a(t), t) dt = \int_c^d [B(b(t), t) - B(a(t), t)] dt\end{aligned}$$

le ultime relazioni scritte completano la dimostrazione delle formule (5.1). ■

TEOREMA 5.2 (DEL ROTORE (G.G. STOKES)) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio aperto con frontiera regolare a tratti e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale definito su un aperto A contenente D , allora vale

$$\int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = \int_{\partial^* D} [F \cdot T](x_1, x_2) ds$$

Dimostrazione. Come noto vale

$$\text{rot}(F) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = (0, 0, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

quindi la terza componente del vettore rotore è $[\text{rot}(F)]_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$. Grazie alle formule (5.1) (pensando $B = F_2$ e $A = F_1$) possiamo scrivere

$$\int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = \int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^* D} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = \int_{\partial^* D} [F \cdot T](x_1, x_2) ds$$

e l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di integrale di linea, quindi l'affermazione è provata. ■

TEOREMA 5.3 (DELLA DIVERGENZA (J.C.F. GAUSS)) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio aperto con frontiera regolare a tratti e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale definito su un aperto A contenente D , allora

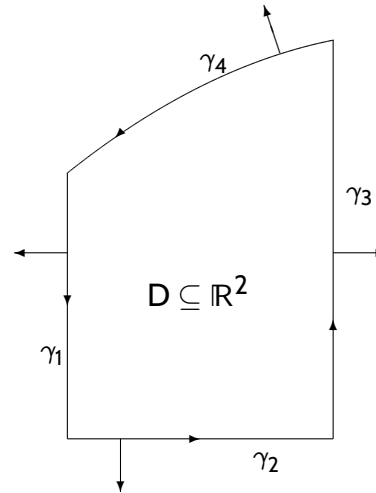
$$(5.2) \quad \int_D \operatorname{div}(F)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} [F \cdot n](x_1, x_2) ds$$

Dimostrazione. Anche il teorema della divergenza segue dalle formule di Gauss-Green, infatti ponendo $(B, A) = F$ le (5.1) sommate ci permettono di scrivere

$$\int_D \operatorname{div}[F](x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_D [\nabla \cdot F](x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_D (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_{\partial^+ D} (-F_2, F_1) \cdot (T_1, T_2) ds = \int_{\partial^+ D} (F_1, F_2) \cdot (-T_2, T_1) ds = \int_{\partial^+ D} F \cdot n ds$$

visto che la normale uscente da D , cioè il vettore n , può essere ottenuto dal vettore T , il versore tangente alla frontiera ∂D percorsa in senso antiorario, tramite una rotazione di $\pi/2$ in senso orario. ■

Dimostrazione. Includiamo a questo punto della discussione una dimostrazione alternativa del teorema della divergenza nel piano. Per raggiungere lo scopo considereremo un dominio particolarmente semplice descritto dal seguente disegno.



Mettiamo qualche puntino sulle i : innanzitutto supponiamo che la frontiera del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sia una curva chiusa semplice, unione di quattro curve di classe

C^1 aventi le seguenti parametrizzazioni:

$$\gamma_1 = \{(a, -t), t \in [-d(a), -c]\}$$

$$\gamma_2 = \{(t, c), t \in [a, b]\}$$

$$\gamma_3 = \{(b, t), t \in [c, d(b)]\}$$

$$\gamma_4 = \{(-t, d(-t)), t \in [-b, -a]\}$$

con $d \in C^1[a, b]$ funzione strettamente crescente tale che $d(x_1) \geq c$.

Osserviamo subito che D è un dominio normale rispetto ad entrambe le variabili e che possiede un solo "lato" non rettilineo: γ_4 . Le varie frecce rappresentate nel disegno indicano i versori normali esterni al dominio su γ_i , $i = 1, \dots, 4$, e il verso antiorario di percorrenza del bordo ∂D , come espresso anche dalle parametrizzazioni dei singoli cammini. Entriamo nel vivo della seconda dimostrazione ricordando la definizione di alcuni oggetti che useremo. Scrivendo il campo vettoriale per esteso $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ possiamo scrivere la sua divergenza per esteso nel seguente modo

$$\operatorname{div}(F(x_1, x_2)) = (\nabla \cdot F(x_1, x_2)) = \partial_1 F_1(x_1, x_2) + \partial_2 F_2(x_1, x_2)$$

Inoltre possiamo scrivere i versori n_i ($i = 1, \dots, 4$), le normali uscenti dal dominio sui tratti che compongono la frontiera ∂D . Dal disegno segue immediatamente che

$$n_1 = (-1, 0) \quad n_2 = (0, -1) \quad n_3 = (1, 0)$$

Il calcolo di n_4 è leggermente più elaborato, poiché $\gamma_4 = \{(-t, d(-t)), t \in [-b, -a]\}$, sappiamo calcolare facilmente il versore tangente alla curva che si scrive nel seguente modo

$$T_4 = \frac{(-1, -d'(-t))}{\sqrt{1 + |d'(-t)|^2}}$$

a questo punto si ottiene il versore normale alla curva semplicemente scambiando le componenti e cambiandone di segno una nel seguente modo

$$n_4 = \frac{(-d'(-t), 1)}{(1 + |d'(-t)|^2)^{1/2}}$$

ci si può convincere che sia la scelta giusta provando a ragionare sulla figura precedente o scrivendo la matrice relativa alla rotazione di $\pi/2$ in senso orario.

A questo punto possiamo cominciare a scrivere per esteso gli integrali coinvolti in (5.2). Usando il fatto che D è un dominio normale rispetto ad entrambe le direzioni degli assi coordinati e le proprietà di additività dell'integrale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \cdot F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_D (\partial_1 F_1(x_1, x_2) + \partial_2 F_2(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_D \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_D \partial_2 F_2(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{d(x_1)} \partial_2 F_2(x_1, x_2) dy \right) dx_1 + \int_c^{d(a)} \left(\int_a^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 + \int_{d(a)}^{d(b)} \left(\int_{d^{-1}(x_2)}^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

Si noti, nell'ultimo passaggio, l'uso della funzione d^{-1} , l'inversa di d , per scrivere l'integrale di $\partial_1 F_1$ integrando prima in x_1 e poi in x_2 .

Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale, le proprietà di additività e usando la sostituzione $y = d(x)$ nell'ultimo termine, otteniamo le seguenti relazioni

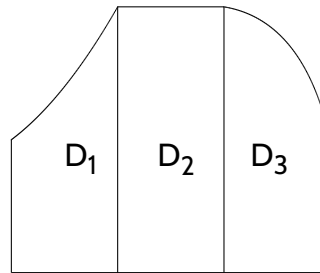
$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div}(F(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 &= \int_a^b (F_2(x_1, d(x_1)) - F_2(x_1, c)) dx_1 + \int_c^{d(a)} (F_1(b, x_2) - F_1(a, x_2)) dx_2 + \int_{d(a)}^{d(b)} \int_{d^{-1}(x_2)}^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_a^b -F_2(x_1, c) dx_1 + \int_c^{d(a)} F_1(b, x_2) dx_2 + \int_c^{d(a)} -F_1(a, x_2) dx_2 + \int_a^b F_2(x_1, d(x_1)) dx_1 + \int_{d(a)}^{d(b)} (F_1(b, x_2) - F_1(d^{-1}(x_2), x_2)) dx_2 \\ &= \int_a^b -F_2(x_1, c) dx_1 + \int_c^{d(b)} F_1(b, x_2) dx_2 + \int_c^{d(a)} -F_1(a, x_2) dx_2 + \int_a^b (F_2(x_1, d(x_1)) - F_1(x_1, d(x_1)) d'(x_1)) dx_1 \end{aligned}$$

A questo punto procediamo con l'integrale curvilineo. Ricordando la definizione di integrale di linea e che ∂D è unione di 4 curve regolari, possiamo scrivere le seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (F(x_1, x_2) \cdot n) ds &= \int_{-d(a)}^{-c} -F_1(a, -t) dt + \int_a^b -F_2(t, c) dt + \int_c^{d(b)} F_1(b, t) dt + \int_{-b}^{-a} \frac{-F_1(-t, d(-t)) d'(-t) + F_2(-t, d(-t))}{(1 + |d'(-t)|^2)^{1/2}} dt \\ &= \int_c^{d(a)} -F_1(a, s) ds + \int_a^b -F_2(t, c) dt + \int_c^{d(b)} F_1(b, t) dt + \int_a^b (F_2(s, d(s)) - F_1(s, d(s)) d'(s)) ds \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche il cambio di variabile $s = -t$ in alcuni degli integrali di linea (si ricordi che gli integrali di linea che non coinvolgono il versore tangente non cambiano di segno cambiando parametrizzazione). Dal confronto delle uguaglianze ottenute segue la tesi. ■

OSSERVAZIONE 5.4 Dopo aver provato il teorema (per ben due volte!) possiamo fare alcune semplici osservazioni. Il caso di un triangolo è un caso particolare dell'enunciato provato, basta considerare la funzione d affine con $d(a) = c$. Si noti che nella dimostrazione abbiamo fatto uso dell'invertibilità di d : se d non è strettamente crescente (o decrescente) è possibile ugualmente usare la dimostrazione precedente spezzando il dominio in maniera opportuna, come nel disegno che segue.



In generale vogliamo ricondurci, in qualche modo, al caso trattato nel teorema 5.3 e per farlo procediamo nel seguente modo. Consideriamo tutti i punti $\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$ della frontiera di D che delimitano i vari tratti di classe C^1 e tracciamo le rette parallele agli assi coordinati passanti per ognuno dei punti p_i . In questo

modo abbiamo tracciato un reticolo irregolare sul nostro dominio, e D resta suddiviso in rettangoli interni e sottodomini con tratti curvilinei. Osserviamo che il teorema della divergenza vale su tutti questi nuovi sottodomini ottenuti, nel caso siano dei rettangoli o dei domini come quelli considerati nei precedenti disegni (si veda la proposizione 5.3). Poiché l'integrale della divergenza è la somma degli integrali sui sottodomini (per l'additività dell'integrale), mentre nei vari integrali curvilinei di flusso si elidono tutti i contributi "interni", la tesi è provata, almeno per tutti i domini del piano per cui si sappia fare la divisione descritta sopra.

A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per generalizzare il teorema di Poincaré agli aperti semplicemente connessi del piano.

TEOREMA 5.5 *Sia F un campo vettoriale di classe $C^1(A, \mathbb{R}^2)$ definito in un aperto A semplicemente connesso. Allora F è conservativo se e solo se è irrotazionale in A .*

Dimostrazione. La condizione necessaria segue dal teorema 4.10. Occorre provare la condizione sufficiente che è equivalente a provare che, per ogni curva regolare a tratti, chiusa e semplice γ , risulta

$$\int_{\gamma} F \cdot T ds = 0$$

e applicare il teorema 4.8 che caratterizza i campi conservativi. Fissata γ , sia $D \subset A$ il dominio limitato che ha γ come frontiera. Tale dominio esiste perché A "non ha buchi". L'esistenza di D può essere dimostrata rigorosamente e questo risultato prende il nome di teorema di Jordan. Supponiamo che γ abbia orientamento antiorario. Dal teorema di Stokes

$$\int_{\gamma} F \cdot T ds = \int_{\partial^+ D} F \cdot T ds = \int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = 0$$

e l'ultimo integrale vale zero perché F è irrotazionale. ■

5.2 Analisi vettoriale nello spazio

Adesso possiamo enunciare il teorema della divergenza nella sua versione più generale.

TEOREMA 5.6 (DELLA DIVERGENZA (DI M.V. OSTROGRADSKIJ E J.C.F. GAUSS)) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 a tratti e sia F un campo vettoriale di classe $C^1(A; \mathbb{R}^n)$ con A un aperto contenente la chiusura di D , allora vale

$$(5.3) \quad \int_D \operatorname{div}[F](x) dx = \int_D \nabla \cdot F(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial D} (F \cdot n)(x) d\sigma$$

Dimostrazione. da scrivere ■

OSSERVAZIONE 5.7 Se Σ il sostegno di una superficie regolare con rappresentazione parametrica $x : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $x(u) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ biunivoca tra D e Σ allora $x(\partial D) = \partial \Sigma$. Se $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$ è una rappresentazione parametrica della frontiera ∂D allora $x(\gamma(t))$ è una rappresentazione parametrica del bordo $\partial \Sigma$.

TEOREMA 5.8 (DEL ROTORE (DI G.G. STOKES)) Sia (x, D) una superficie regolare semplice di classe C^2 di sostegno $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale definito su un aperto A tale che $\Sigma \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$, allora vale

$$\int_{\Sigma} [\operatorname{rot}(F) \cdot n](x) d\sigma = \int_{\partial^+ \Sigma} (F \cdot T)(x) ds$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste essenzialmente nello scrivere per esteso i due integrali che compaiono nella tesi, usare attentamente il teorema di derivazione delle funzioni composte, e verificare la loro uguaglianza, grazie al teorema di Stokes nel piano precedentemente provato (teorema 5.2). Cominciamo con l'integrale di superficie

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [\operatorname{rot}(F) \cdot n] d\sigma &= \int_D \operatorname{rot}(F)(x(u)) \cdot (\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)) du \\ &= \int_D [\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1] \cdot (\partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_1 x_3 \partial_2 x_2, \partial_1 x_3 \partial_2 x_1 - \partial_1 x_1 \partial_2 x_3, \partial_1 x_1 \partial_2 x_2 - \partial_2 x_1 \partial_1 x_2) du \\ &= \int_D (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)(\partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_1 x_3 \partial_2 x_2) + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)(\partial_1 x_3 \partial_2 x_1 - \partial_1 x_1 \partial_2 x_3) + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(\partial_1 x_1 \partial_2 x_2 - \partial_2 x_1 \partial_1 x_2) du \end{aligned}$$

adesso affrontiamo l'integrale di linea, assumendo di avere la seguente parametrizzazione regolare del bordo $\partial^+ D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, con $t \in [a, b]$. Dall'osservazione 5.7 sappiamo che $x(\gamma(t))$ è una parametrizzazione regolare a tratti del bordo di Σ , quindi, ricordando la definizione di integrale di linea, il

teorema di Schwarz e il teorema 5.2, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial^* \Sigma} (F \cdot T_x) ds &= \int_{\partial^* \Sigma} F(x(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} x(\gamma(t)) dt = \int_a^b F(x(\gamma(t))) \cdot (\nabla x_1(\gamma(t)) \cdot u'(t), \nabla x_2(\gamma(t)) \cdot u'(t), \nabla x_3(\gamma(t)) \cdot u'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (F(x(\gamma(t))) \cdot (\partial_1 x_1(\gamma(t)), \partial_1 x_2(\gamma(t)), \partial_1 x_3(\gamma(t))), F(x(\gamma(t))) \cdot (\partial_2 x_1(\gamma(t)), \partial_2 x_2(\gamma(t)), \partial_2 x_3(\gamma(t))), 0) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_{\partial^* D} (F \cdot \partial_1 x, F \cdot \partial_2 x, 0) \cdot T_\gamma ds = \int_D \operatorname{rot}(F \cdot \partial_1 x, F \cdot \partial_2 x, 0) \cdot e_3 du = \int_D [\partial_1(F \cdot \partial_2 x) - \partial_2(F \cdot \partial_1 x)] du \\
 &= \int_D [\partial_1(F_1 \partial_2 x_1 + F_2 \partial_2 x_2 + F_3 \partial_2 x_3) - \partial_2(F_1 \partial_1 x_1 + F_2 \partial_1 x_2 + F_3 \partial_1 x_3)] du \\
 &= \int_D [\nabla F_1 \partial_1 x \partial_2 x_1 + F_1 \partial_{12} x_1 + \nabla F_2 \partial_1 x \partial_2 x_2 + F_2 \partial_{12} x_2 + \nabla F_3 \partial_1 x \partial_2 x_3 + F_3 \partial_{12} x_3 - \nabla F_1 \partial_2 x_3 - F_1 \partial_{12} x_1 - \nabla F_2 \partial_2 x \partial_1 x_2 - F_2 \partial_{12} x_2 - \nabla F_3 \partial_2 x \partial_1 x_3 - F_3 \partial_{12} x_3] du \\
 &= \int_D [(\partial_1 F_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_1 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_1 \partial_1 x_3) \partial_2 x_1 + (\partial_1 F_2 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_2 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_1 x_3) \partial_2 x_2 + (\partial_1 F_3 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_3 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_3 \partial_1 x_3) \partial_2 x_3 \\
 &\quad - (\partial_1 F_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_1 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_1 \partial_2 x_3) \partial_1 x_1 - (\partial_1 F_2 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_2 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_2 x_3) \partial_1 x_2 - (\partial_1 F_3 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_3 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_3 \partial_2 x_3) \partial_1 x_3] du \\
 &= \int_D [\partial_2 F_1 \partial_1 x_2 \partial_2 x_1 + \partial_3 F_1 \partial_1 x_3 \partial_2 x_1 + \partial_1 F_2 \partial_1 x_1 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_1 x_3 \partial_2 x_2 + \partial_1 F_3 \partial_1 x_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 F_3 \partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_2 F_1 \partial_2 x_2 \partial_1 x_1 \\
 &\quad - \partial_3 F_1 \partial_2 x_3 \partial_1 x_1 - \partial_1 F_2 \partial_2 x_1 \partial_1 x_2 - \partial_3 F_2 \partial_2 x_3 \partial_1 x_2 - \partial_1 F_3 \partial_2 x_1 \partial_1 x_3 - \partial_2 F_3 \partial_2 x_2 \partial_1 x_3] du
 \end{aligned}$$

confrontando con l'integrale calcolato precedentemente abbiamo la tesi. ■

TEOREMA 5.9 (Alcune identità utili) Date $u, w \in C^2(\Omega)$ e $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Delta w(x) dx &= \int_{\partial \Omega} \partial_n w d\sigma \\
 \int_{\Omega} u \operatorname{div}(F) dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial \Omega} u F \cdot n d\sigma \\
 \int_{\Omega} u \Delta w dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + \int_{\partial \Omega} u \partial_n w d\sigma \\
 \int_{\Omega} [u \Delta w - w \Delta u] dx &= + \int_{\partial \Omega} [u \partial_n w - w \partial_n u] d\sigma
 \end{aligned}$$

TEOREMA 5.10 Siano A un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^3 e F un campo vettoriale di classe $C^1(A, \mathbb{R}^3)$. Allora F è conservativo se e solo se è irrotazionale.