TEOREMA di PEANO Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$. Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n con punto iniziale x_0 relativo a f, cioè

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Allora

$$\boxed{f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)\quad \text{per } x\to x_0}\;(**)$$

cioè $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica $(**)$.

Polinomi di Taylor di funzioni elementari con $x_0=0$ (Polinomi di Maclaurin)

$f(x)=e^x$

$$T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{\begin{aligned}e^x&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\quad\text{per } x\to 0\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\end{aligned}}$$

$f(x)=\sin x$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\qquad f^{4}(0)=0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ $\qquad f^{(4)}(0) = 0$

d'ora in poi il ciclo si ripete.

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= T_{2n+2}(x)$$

Il teorema di Peano dice che:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cancel{o(x^{2n+1})} \ \ o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0 \end{aligned}}$$

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1$

etc...

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n+1}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n x^{2n} + \cancel{o(x^{2n})}\ o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$f(x) = \sinh x$$

$$T_{2n+1}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2n+2}(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{\cancel{2n+1}\ 2n+2}\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$f(x) = \cosh x$$

$$T_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n+1}(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = + \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{+2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{2(+3)}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 24$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0. \end{aligned}}$$

Applicazioni di Taylor: limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$\sim \frac{x^3}{6}$

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di

$$f(x) = \sin x + x^2 \cos x - x e^x$$

$$= \underbrace{x + o(x^2)}_{\sin x} + x^2 \big(\underbrace{1 + o(1)}_{\cos x}\big) - x \big(\underbrace{1 + x + o(x)}_{e^x}\big) =$$

$$= \cancel{x} + o(x^2) + \cancel{x^2} + \cancel{o(x^2)} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \underbrace{x\, o(x)}_{o(x^2)} =$$

$$= o(x^2)$$

Ho preso troppi pochi termini negli sviluppi di Taylor.
Ne aggiungo altri

$$\sin x + x^2 \cos x - x e^x = \qquad \boxed{x \to 0}$$

$$x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \cancel{\underbrace{x^2 o(x^2)}_{= o(x^4)}} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + \cancel{o(x^4)}$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + o(x^3) = -\frac{2}{3} x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3} x^3$$

Infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0$.

Ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, di

$$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$$

due modi: 1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ con l'Hôpital (ripetuto)

trovare $\alpha > 0$ t.c. lim sia finito e non nullo.

2) Con Taylor.

$$1 - \cos x \cosh x =$$

$$\left[\begin{array}{ll}\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) & \text{per } x \to 0 \\ \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) & \end{array}\right]$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$+ \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} + \cancel{\frac{x^6}{48}} + \cancel{\frac{x^2}{2} o(x^5)}$$

lo butto

$$- \frac{x^4}{24} =$$

$$= x^4\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{6} \quad \text{inf}^{\text{mo}} \text{ di ordine } 4.$$

Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 10 di

$$f(x) = \sin(x^2).$$

<u>1° modo</u>: calcolare $f'(x), f''(x), \dots f^{(10)}(x)$ e scrivere il polinomio (FATICOSO, POCO EFFICIENTE)

<u>2° modo</u>. Ricordare che $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)$ $t \to 0$

Poiché, per $x \to 0$, si ha $x^2 \to 0$, la posso sostituire al posto di t:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + o(x^{10}) \quad \text{per } x \to 0$$

Perché questo è il polinomio di Maclaurin di $\sin(x^2)$?

Ho trovato un polinomio $P_{10}(x)$ di grado ≤ 10 t.c.

$$\sin(x^2) - P_{10}(x) = o(x^{10}) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Il teorema di Peano garantisce che l'unico polinomio di grado ≤ 10 che verifica questa proprietà è il polinomio di Taylor di grado 10.

Quanto vale $f^{(10)}(0)$? Quanto vale $f^{(8)}(0)$

$f^{(8)}(0) = 0$ perché non ci sono termini di grado 8 nel polinomio di Maclaurin

$f^{(10)}(0)$? deve essere $\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{120}$

$$\Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

<u>OSS</u> Una funzione dispari (pari) $f(-x) = -f(x)$ ha il polinomio di Maclaurin che contiene solo potenze dispari (pari)

f dispari $\Rightarrow f(0) = 0$

$\Downarrow$

f' pari

$\Downarrow$

f'' dispari $\Rightarrow f''(0) = 0$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

Calcolare lo sviluppo di Maclaurin di $(\alpha \in \mathbb{R})$

$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1) \qquad \frac{f''(0)}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \qquad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \qquad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1) \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

Il numero

$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ si chiama coeff^te binomiale generalizzato

e si indica con $\binom{\alpha}{k}$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1$$

$$(1+x)^\alpha = \underbrace{\underset{\binom{\alpha}{0}}{1} + \underset{\binom{\alpha}{1}}{\alpha} x + \underset{\binom{\alpha}{2}}{\underline{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}} x^2 + \dots \binom{\alpha}{n} x^n}_{T_n(x)} + o(x^n)$$

per $x \to 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

Per esempio $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} x^2 + \dots + \binom{1/2}{n} x^n + o(x^n)$$

$$-\frac{1}{8}$$

<u>OSS</u> se $\alpha = m \in \mathbb{N}$.

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$\forall n$.

se $n > m$, cosa succede del polinomio di Taylor?

quanto vale $\binom{m}{k}$ se $k > m$?

uno di questi vale zero

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} = 0$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$$

Questa diventa un'uguaglianza per il binomio di Newton