Laboratorio di decisioni statistiche - Laboratorio 8

Simulazione prova finale 1 – 2024-2025

20 novembre 2024

Nome, cognome e matricola: ____

1. $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$, $\Theta \sim \mathrm{N}(1, 2)$. Determinare il valore atteso a posteriori di θ e l'insieme di credibilità al 90% in corrispondenza del campione $\mathbf{z}_n = (2, 3, 1, 5, 7)$.

2. $X_i|\theta \sim \mathrm{Ber}(\theta)$. Supponendo di non avere informazioni a priori disponibili per θ, scegliere una opportuna distribuzione iniziale per il parametro θ e fornire una stima puntuale e una stima intervallare, supponendo di avere osservato un campione con $n = 10$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i = 3$.

3. $X \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ e $\theta \sim \mathrm{Beta}(2, 3)$. Con riferimento alla distribuzione predittiva di X, calcolare (con Monte Carlo): (a) $V[X]$, (b) $E[X]$, (c) $P(X > 0.5)$

4. $X_i|\theta \sim \mathrm{Pois}(\theta)$, $\Theta \sim \mathrm{Gamma}(3, \texttt{rate} = 3)$. Sia $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$, $n = 5$ e sia $a = 2$ una stima puntuale per θ. Calcolare (con Monte Carlo) la seguente probabilità a posteriori: $\mathbb{P}[(\Theta - a)^2 > 0.5|\mathbf{z}_n]$.

5. Sia $\omega \sim \text{InvGa}(2, \texttt{rate} = 3)$ e $W_\delta(\omega) = |\delta - \omega|$. Calcolare (con Monte Carlo) per la decisione $\delta = 1$ il valore di: (a) criterio del valore atteso; (b) criterio dellla soglia critica con $\lambda = 1.5$

   Ripetere con $\delta = 1/2$ e verificare quale tra le due decisioni considerate è migliore con i due criteri.

6. $X_i|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$, $\Theta \sim \text{Beta}(2, 2)$, $\sum_{i=1}^n x_i = 5$, $n = 10$. Determinare l'insieme l'insieme ET di livello 0.95 e la sua lunghezza.

7. Con riferimento al precedente esercizio, trovare l'insieme ET di livello 0.95 per $\psi = \ln \frac{\theta}{1-\theta}$.

8. Sia $X|\theta \sim \text{Exp}(\theta) = \text{Ga}(1, \texttt{rate} = \theta)$, $n = 1$. Considerare le ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ e $H_1 : \theta = \theta_1 = 1$. Determinare con MC la probabilità di accettare H_0, quando supponiamo che tale ipotesi sia quella vera, ovvero il valore di $\mathbb{P}_{\theta_0}[B_{01(X)} > 1]$.