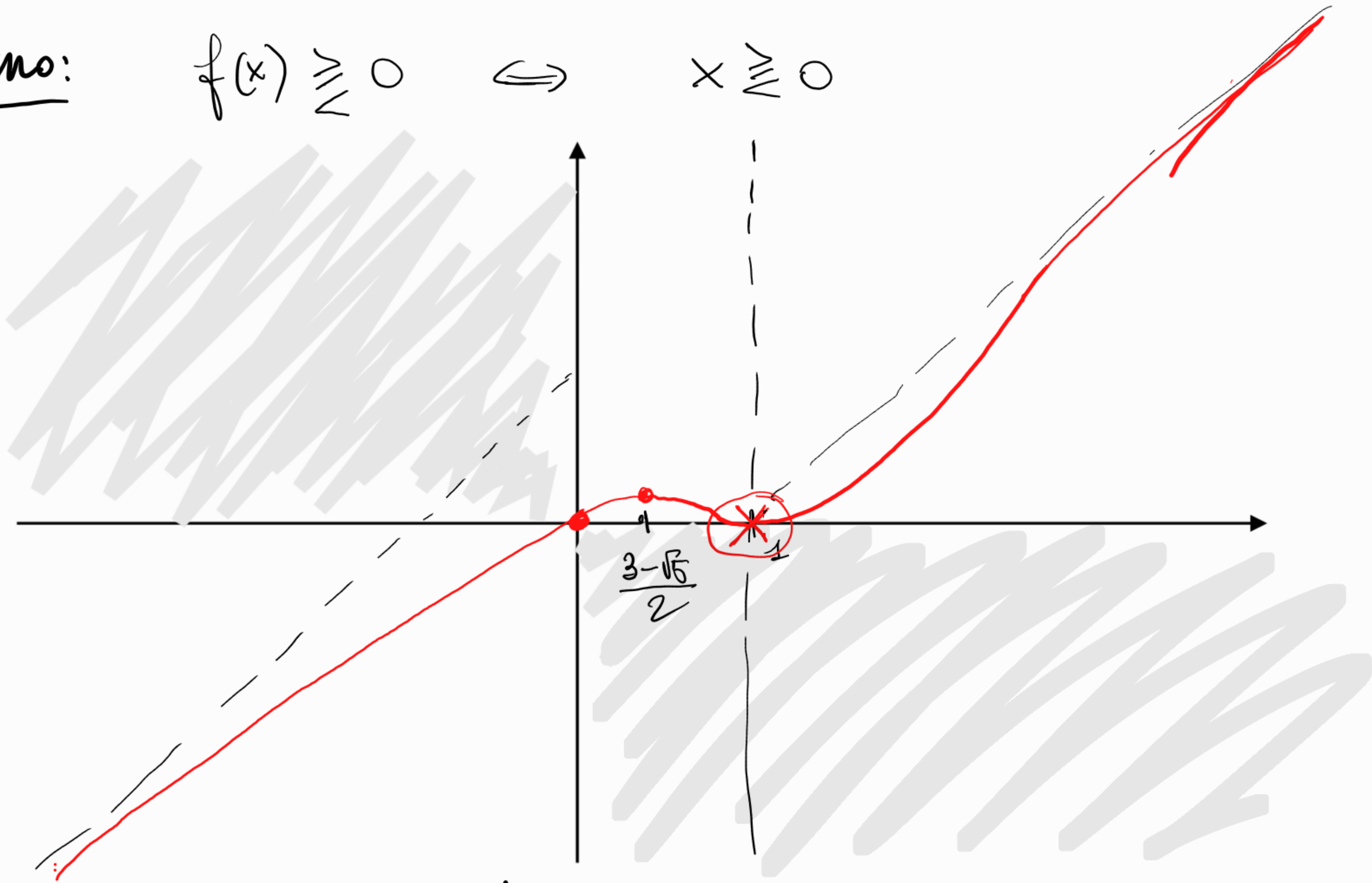
Studio di funzione:

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \begin{cases} x e^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ x e^{\frac{1}{x-1}} & x<1 \end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Segno: $f(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$



Continuità e limiti significativi:

f è continua, quindi derivabile, nel suo dominio.

$$\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x}\ \underbrace{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}_{e^0=1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{x}\ \underbrace{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}_{e^0=1} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{x}\ \underbrace{e^{-\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{|x-1|}}}}_{\text{"}e^{-\infty}\text{"}=0} = 0.$$

La funzione è "estendibile con continuità" in $x=1$. Cioè se definisco

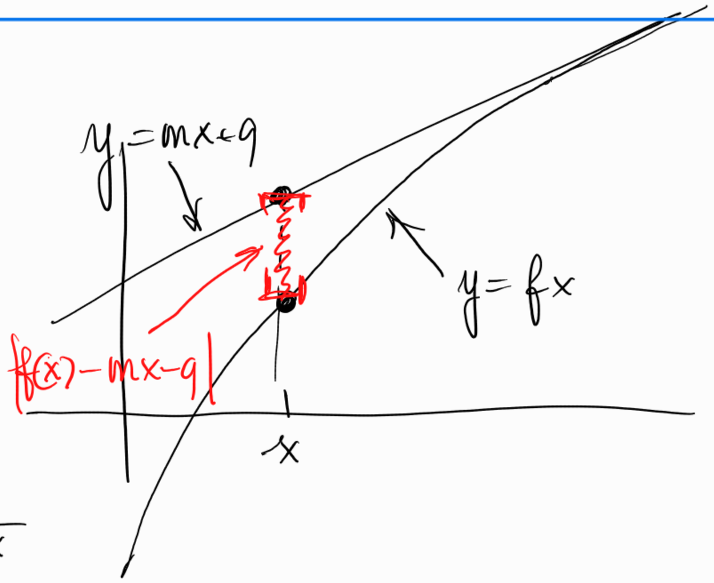
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases},$$

$\tilde{f}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.

DEF Una retta di equazione $y = mx + q$ dove $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ si dice **asintoto obliquo** di f per $x \to +\infty$ (oppure $x \to -\infty$) se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - (mx + q)\big) = 0$$

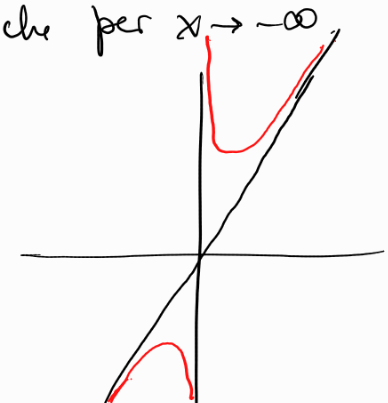
che equivale a $\displaystyle \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left| f(x) - (mx+q) \right| = 0$



Esempio: se $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

La retta $y = 2x$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ e anche per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$f(x) = -x+5 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

La retta $y = -x+5$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Infatti

$$f(x) - (-x+5) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

Come si trovano gli asintoti obliqui?

PROP.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - (mx+q)\big) = 0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - mx\big) = q \end{cases}$$

Dim "$\Leftarrow$" banale perché

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = q \iff \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx - q\big) = 0$$

"$\Rightarrow$" Sappiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (mx+q)\big) = 0$

Devo provare che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(f(x)-mx-q)+(mx+q)}{x} =$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{f(x)-mx-q}{x}}_{\to 0}} + m + \boxed{\underbrace{\frac{q}{x}}_{\to 0}} \to m$$

$x \to +\infty$ $\qquad f(x)-mx-q \to 0$, $\quad x \to +\infty$

$\square$

Se uno dei due limiti nella parte di destra dell'enunciato è infinito o non esiste, l'asintoto obliquo non c'è.

Torniamo alla nostra $f(x) = x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}}$

Vediamo se ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x e^{-\frac{1}{|x-1|}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{-\frac{1}{|x-1|}} - 1\right) = (\infty \cdot 0) =$$

OSS 1) $-\frac{1}{|x-1|} \to 0$ $\qquad$ 2) $e^t - 1 \sim t$ $\qquad t \to 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{|x-1|}} - 1 \sim -\frac{1}{|x-1|} = -\frac{1}{x-1} \qquad x \to +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{x-1}\right) = -1$$

$\Rightarrow$ $y = x - 1$ è asintoto obliquo dx per $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} x\underbrace{\left(e^{-\frac{1}{|x-1|}} - 1\right)}_{\sim} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$0$$

$$-\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{x-1}$$

$y = x+1$ è asintoto obliquo di f per $x\to-\infty$.

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \begin{cases} x e^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ x e^{\frac{1}{x-1}} & x<1 \end{cases}$$

Derivata prima

$\underline{x>1}$ $\Rightarrow$

$$f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{1-x}}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}}\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) =$$

$$\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

$$= e^{\frac{1}{1-x}}\left(\frac{x^2-2x+1+x}{(1-x)^2}\right) = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{x^2-x+1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \underset{\text{mai}}{x^2-x+1=0} \qquad \cancel{x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}}$$

$f'(x) > 0 \iff x^2-x+1>0$ vero $\forall x>1$.

$\Rightarrow f$ strett. crescente in $(1,+\infty)$

$\boxed{x<1}$

$$f'(x) = \left(x e^{-\frac{1}{1-x}}\right)' = e^{-\frac{1}{1-x}}\left(1 - \frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{1-x}} \frac{x^2-2x+1-x}{(1-x)^2} = e^{-\frac{1}{1-x}} \frac{x^2-3x+1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \iff x^2-3x+1=0 \qquad x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} =$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

solo $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è accettabile $\simeq 0{,}4$

$$f'(x)>0 \iff x^2-3x+1>0$$

$$\Rightarrow \left(x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \vee \cancel{\left(x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

f è strett. crescente in $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$

è strett. decrescente in $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$.

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un pto di max. locale stretto

cioè esiste un intorno U di $x_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ t.c.

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

- Manca lo studio della derivata seconda (da fare in seguito)

- Possiamo controllare "con che pendenza" il grafico arriva a zero per $x \to 1^{\pm}$

$$\lim_{\substack{x\to 1^+ \\ 1^-}} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} \frac{\overset{\to 1}{x^2-x+1}}{(1-x)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$x-1=y\to 0^+ \qquad x=1+y$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \boxed{\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2}} = \lim_{t\to+\infty} \cancel{e^{-t}}\,\frac{t^2}{e^t}=0 \qquad t=\frac{1}{y}\to+\infty$$

$$\parallel$$

$$\left(e^{-\frac{1}{y}-2\log y}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \boxed{\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}}\ \boxed{\left(x^2-3x-1\right)}$$

$$\downarrow$$

$$1-3-1=-3$$

$$= -3\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} = 0$$

$$y=1-x\to 0^+$$

La funzione $f(x)$ è prolungabile in $x=1$ in maniera non solo continua ma anche derivabile

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq 1 \\ 0 & \text{se } x=1\end{cases}$$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

Derivata seconda.

Supponiamo f derivabile in $E\subseteq\mathbb{R}$. $f':E\to\mathbb{R}$.
Sia $x_0\in E$. Diremo che **f è derivabile due volte in x_0** se f' è derivabile in x_0, cioè se esiste finito il limite

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

derivata seconda di f in x_0.

Altre notazioni: $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\Big|_{x_0}$ $\quad D^2f(x_0)=\ddot{f}(x_0)$

Esempi:

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos(\log x)$

$f'(x) = \dfrac{-\sin(\log x)}{x}$

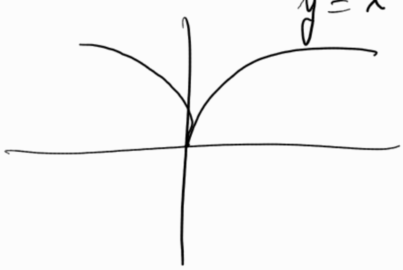
$f''(x) = -\dfrac{\frac{\cos(\log x)}{\cancel{x}}\cancel{x} - \sin(\log x)\, 1}{x^2} = \dfrac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$

$\forall x > 0$

$f(x) = x^{5/3} \qquad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

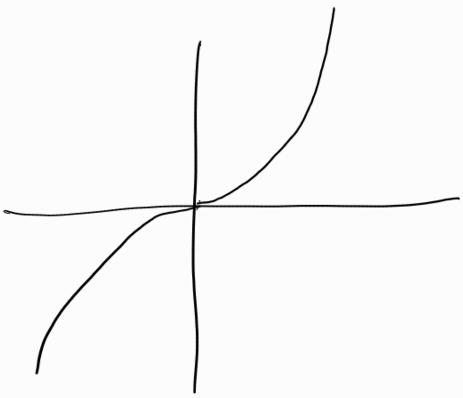
$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-1/3} \qquad \forall x \neq 0$

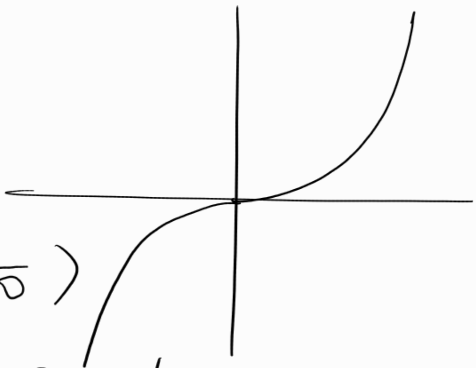


e se $x = 0$? $f''_+(0) = +\infty$

$f''_-(0) = -\infty$

$\nexists \; f''(0)$





$f(x) = x|x|$

$f'(x) = 2|x|$ (visto in passato)

$f''(x) = 2(|x|)' = 2 \operatorname{sign} x \quad$ se $x \neq 0$

$f''(0) \nexists$