Ora possiamo finalmente dimostrare un risultato già usato più volte:

TEOREMA f continua in $[a,b)$, derivabile in (a,b).
Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

$$f'_+(a) = \ell$$

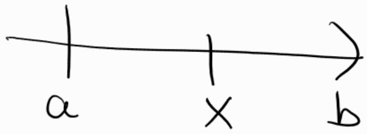
DIM

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Per $x \in (a,b)$ considero l'intervallo $[a,x]$

f continua in $[a,x]$? sì perché $[a,x] \subset [a,b)$

f derivabile in (a,x)? sì " $(a,x) \subset (a,b)$



$\overset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, c(x) \in (a,x)$ t.c.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(c(x)) =$$

[OSS se $x \to a^+$, $c(x) \to a^+$ $\quad a < c(x) < x$]

$$= \lim_{y\to a^+} f'(y) = \ell \qquad \square$$

$\boxed{c(x) = y \to a^+}$

Criterio differenziale di monotonia

Sia I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I, derivabile nei pti interni di I. Allora

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ crescente in I
2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ decrescente in I
3) $f'(x) > 0 \ \forall x$ interno a $I \implies f$ strett. crescente in I.
4) $f'(x) < 0 \ \forall x$ interno a $I \implies f$ strett. decrescente in I.

Conseguenza: Teorema

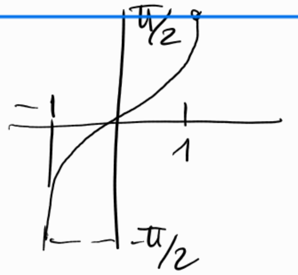
$$f \text{ costante in } \overset{\text{intervallo}}{I} \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

La parte "$\Rightarrow$" è già nota.

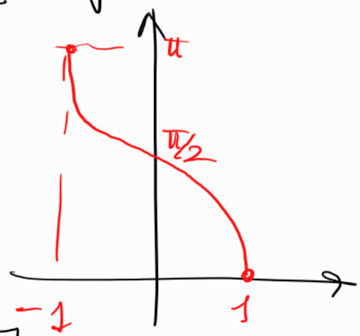
"$\Leftarrow$" Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, allora

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \implies f \text{ crescente in } I \\ f'(x) \leq 0 \quad " \quad \implies f \text{ decrescente in } I \end{array}\right\} \implies f \text{ costante in } I$$

Applicazioni



$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$

Voglio verificare che

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Ciò equivale a

$$\underbrace{\arcsin x + \arccos x}_{f(x)} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

f continua in $[-1,1]$.

f derivabile in $(-1,1)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$\Rightarrow$ f costante in $[-1,1]$.

$$f(x) = f(0) = \underbrace{\arcsin 0}_{= 0} + \underbrace{\arccos 0}_{= \pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ definita in $(0,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{costante} = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi/2.$$

in $(0,+\infty)$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0.}$$

Se invece considero $(-\infty,0)$, si ottiene

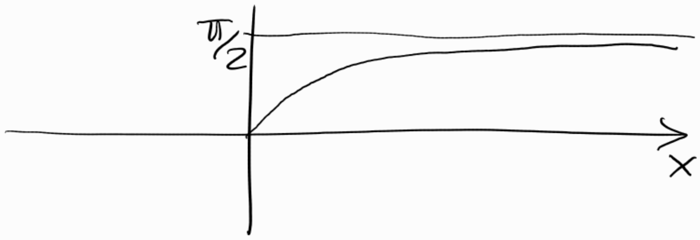
$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \text{costante} = f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}. \qquad \forall x<0}$$

Attenzione: una funzione con derivata sempre nulla è costante in ogni intervallo in cui è definita.

Applicazione: Calcolare l'ordine di infinitesimo di $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ per $x \to +\infty$



Devo trovare $\alpha>0$ t.c.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right) = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$x^{\alpha}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}_{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = x^{\alpha}\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}_{\sim\frac{1}{x}} \sim x^{\alpha}\frac{1}{x} = 1 \qquad \alpha=1$$

$\operatorname{arctg} t \sim t$ per $t\to 0$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \sim \frac{1}{x} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

infinitesimo di ordine 1.

Il criterio di monotonia è utile per provare disuguaglianze

Proviamo che $\log x \leq x-1 \qquad \forall x>0$.

$$f(x) = \log x - x + 1 \overset{?}{\leq} 0 \qquad \forall x>0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \gtreqless 0$$

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \iff \frac{1}{x} > 1 \iff x<1.$$

$f'(x) > 0$ in $(0,1)$

$f'(x) = 0$ in $x=1$

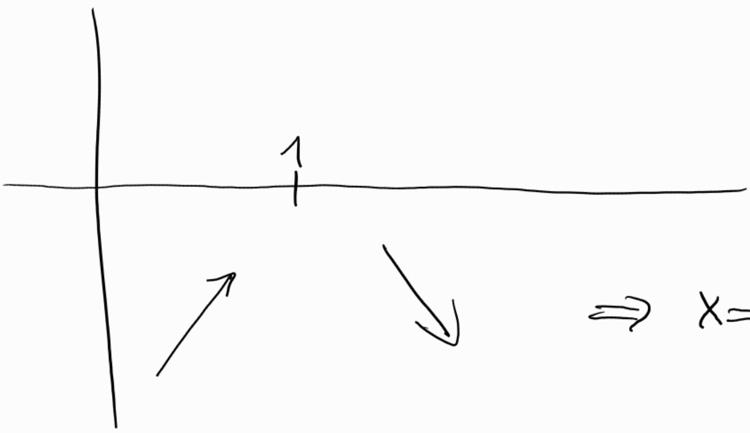
$f'(x) < 0$ in $(1,+\infty)$.

Applico il criterio di stretta monotonia all'intervallo $(0,1]$

$\Rightarrow f$ strett. crescente in $(0,1]$

Applico il criterio " " " " $[1,+\infty)$

$\Rightarrow f$ strett. decrescente in $[1,+\infty)$

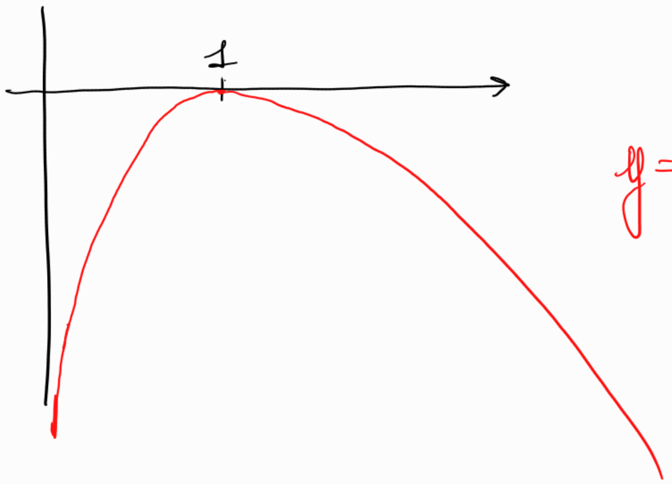


$\Rightarrow x=1$ è pto di max. assoluto di f

$$f(1) = \log 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\log x - x + 1) = -\infty$$

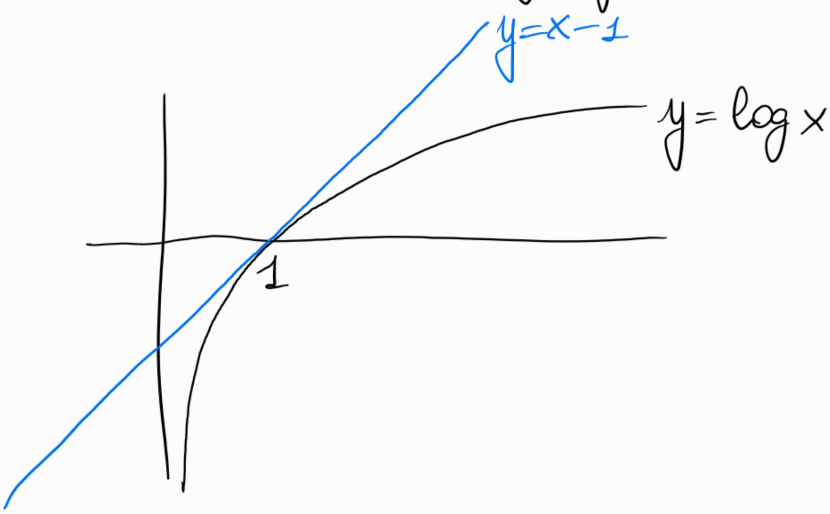
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\log x - x + 1) = -\infty$$



$y = \log x - x + 1 = f(x)$

Abbiamo provato che $\log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

con uguaglianza solo per $x = 1$



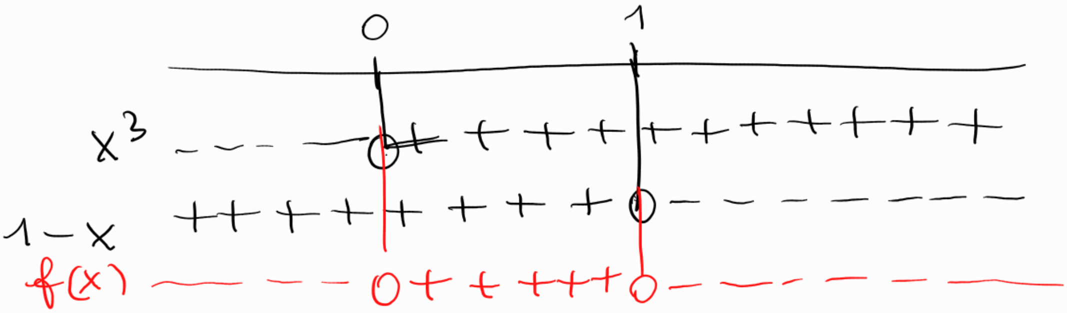
Esercizio: Provare che $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Trovare estremi locali e assoluti di $f(x) = \underline{x^3(1-x)} = x^3 - x^4$

Dominio: $\mathbb{R}$ non ci sono simmetrie apparenti.

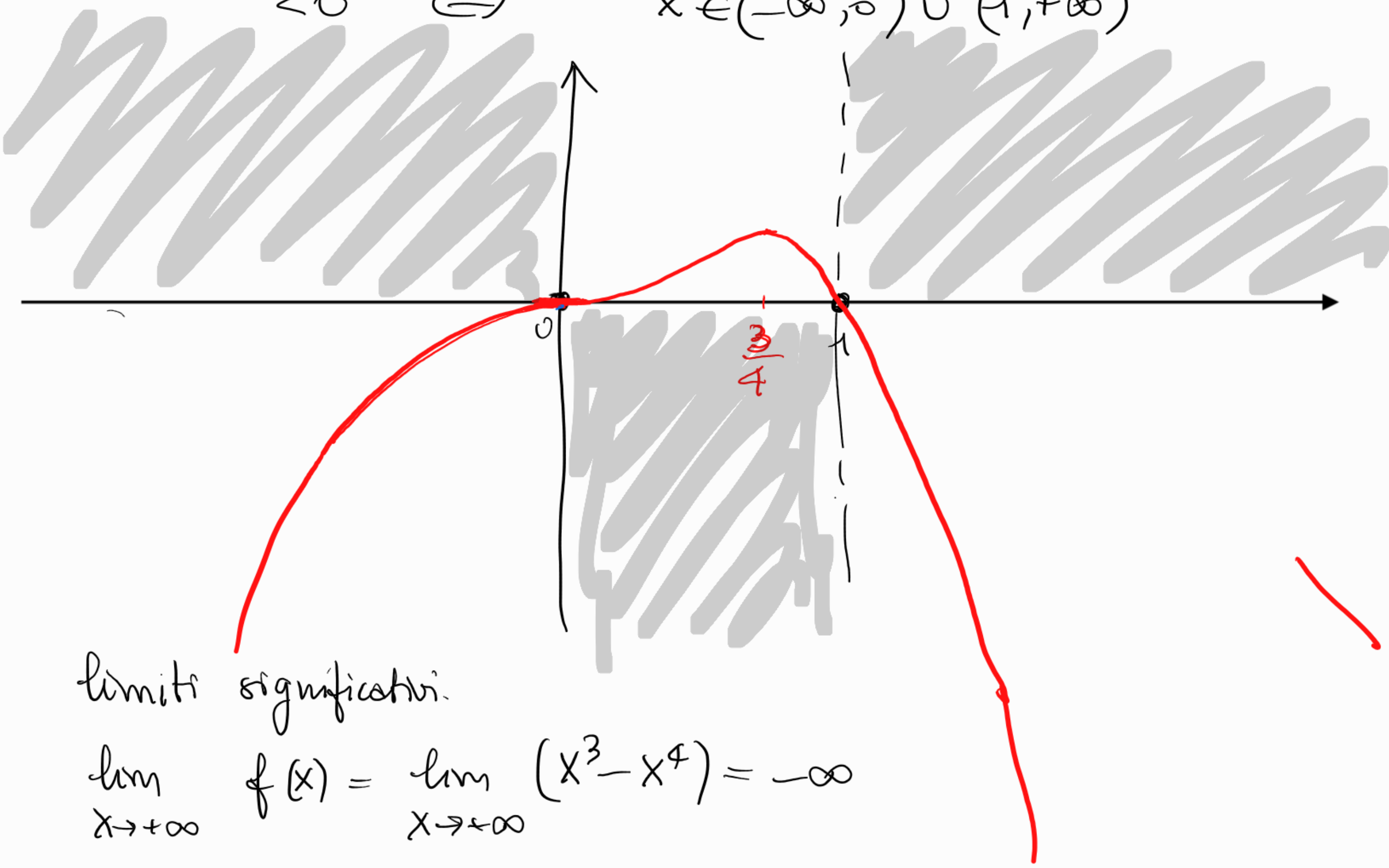
Studio del segno:

$f(x) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1$.



$f(x) > 0 \iff x \in (0,1)$

$< 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



limiti significativi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

+ Eventuali asintoti obliqui (dopo).

- f continua in $\mathbb{R}$.
- f derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - x^4)' = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x).$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, \quad x = \frac{3}{4}$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

f strett. crescente in $(-\infty, 0]$ e in $\left[0, \frac{3}{4}\right]$

cioè strett. crescente in $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

f strett. decrescente in $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

$x = \frac{3}{4}$ pto di max. assoluto (ovviamente anche max. locale)

$x = 0$ è un pto critico che non è estremo relativo.

Studio di $f(x) = x^{-4} - 2x^{-2} = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

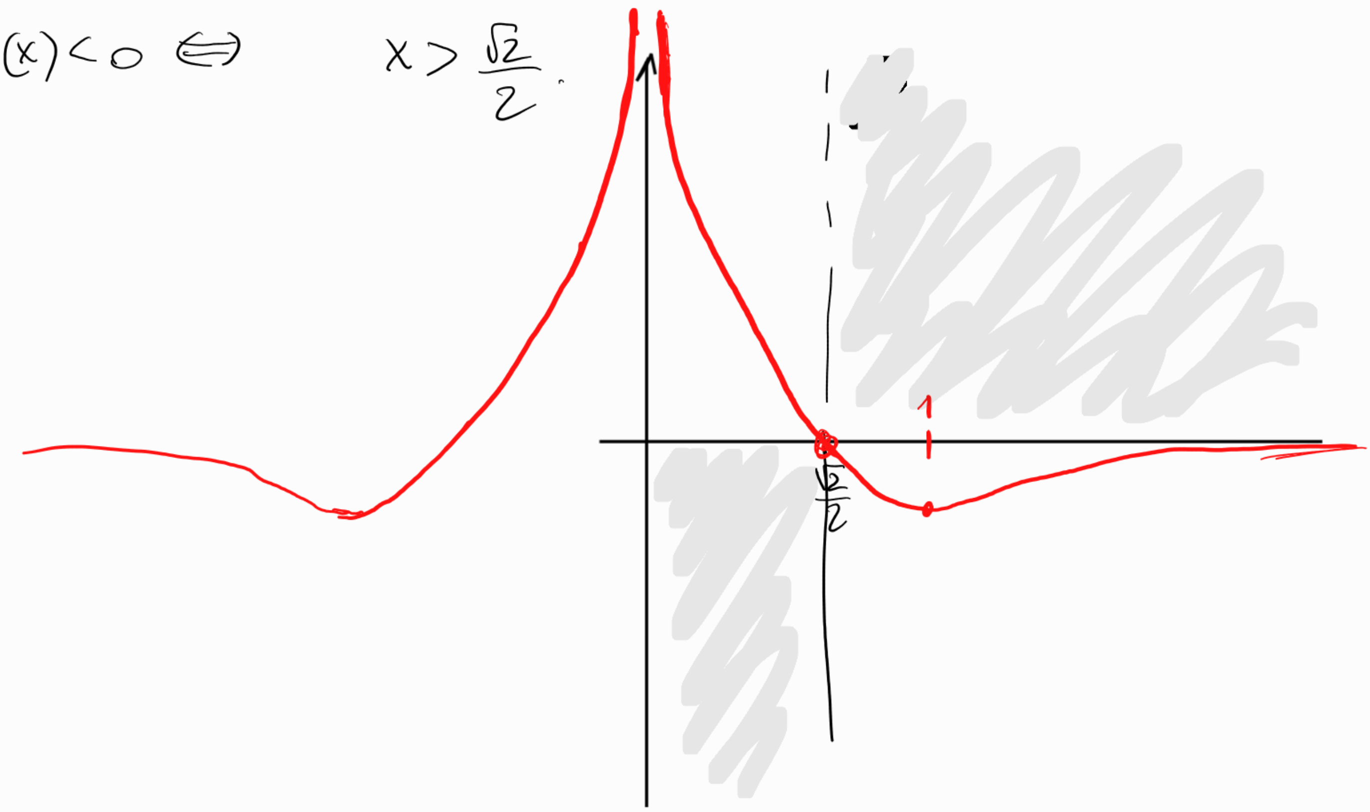
Simmetrie: f è pari. $\Rightarrow$ la studio in $(0, +\infty)$.

Studio del segno.

$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^2} \iff \frac{1}{x^2} = 2 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) > 0 \iff \frac{1}{x^4} > \frac{2}{x^2} \iff \frac{1}{x^2} > 2 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) < 0 \iff x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



f continua, anzi, derivabile nel suo dominio

Limiti significativi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\frac{1-2x^2}{x^4} \sim \frac{1}{x^4}$$

DEF Diremo che la retta verticale $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per f se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

(basta una delle due).

Nel nostro caso l'asse y (cioè la retta $x=0$) è asintoto verticale di f.

DEF Una retta orizzontale $y = y_0$ si dice **asintoto orizzontale** di f per $x \to +\infty$ (oppure $x\to-\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$$

Nel nostro caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, quindi la retta $y=0$ (cioè l'asse x) è asintoto orizzontale di f per $x\to+\infty$ (e ovviamente anche per $x\to-\infty$).

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}\right)' = \frac{-4}{x^5} - 2 \cdot \frac{(-2)}{x^3} = 4\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right)$$
$\forall x > 0$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \overset{(x>0)}{\iff} x = 1$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} > 0 \iff x^2 > 1 \overset{(x>0)}{\iff} x > 1.$$

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

$\Rightarrow$ f strett. crescente in $[1, +\infty)$

f strett. decresc. in $(0, 1]$.

$x = 1$ pto di min. assoluto di f.

OSS Negli esempi visti abbiamo spesso ragionato così.

f decrescente in $(x_0 - \delta, x_0]$

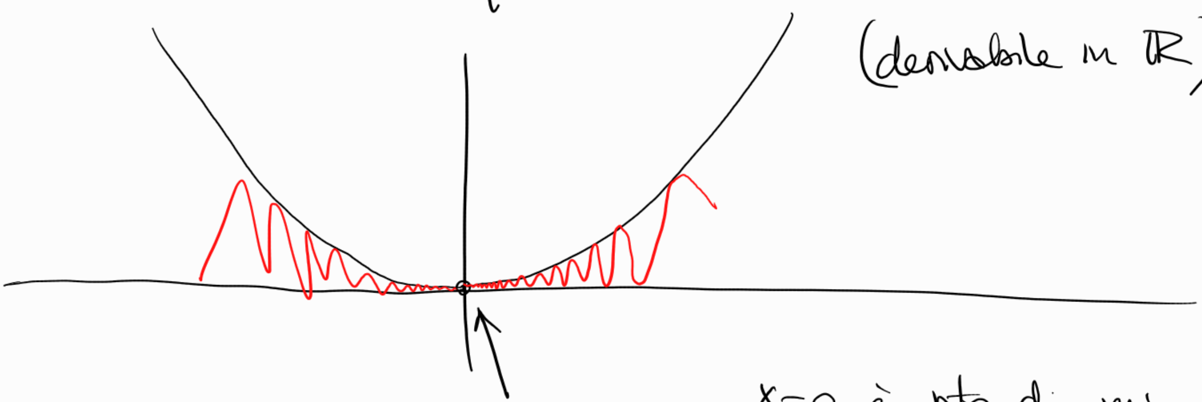
f crescente in $[x_0, x + \delta)$

$\boxed{\Rightarrow}$ x_0 è pto di min. locale di f.

la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è falsa in generale

Esempio $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(derivabile in $\mathbb{R}$)



$x = 0$ è pto di min. assoluto

ma f non è crescente in nessun intorno destro di 0

" " decrescente " " " sinistro di 0.