Teoria statistica delle decisioni - I verifica intermedia – a.a. 2019-2020 - 29 novembre 2019

Cognome, nome e n. di matricola: SOLUZIONI

Istruzioni

- vengono valutate solo le soluzioni scritte su questi fogli
- indicare nelle soluzioni i numeri e le lettere dei quesiti (esempio: 1a), 1b) etc.)

\- - -

8 punti

1. Sia S_Δ la regione del primo quadrante del piano delimitata dalle rette $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$ e dalla funzione $y = f(x)$ definita ponendo

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}.$$

3 (a) Determinare l'equazione della retta r_0 tangente la funzione $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$, con $x_0 = 3/4$.

3 (b) Determinare il valore di $K_{va}[W_{\delta_0}]$ per la decisione δ_0 associata al punto P_0 rispetto alla distribuzione associata alla retta r_0.

2 (c) Determinare il punto P_M corrispondente alla decisione ottima δ^*_M per il criterio del minimax e il valore di $K_M[W_{\delta^*_M}]$.

$\boxed{1a}$ $r_0: y = mx + q$

$$\begin{cases} m = f'(x)\Big|_{x=x_0} \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2x^2}\Big|_{x_0=\frac{3}{4}} = -\dfrac{8}{9} \\ y_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x_0} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{6} \\ q: \dfrac{7}{6} = -\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{3}{4}\right) + q \Rightarrow q = \dfrac{11}{6} \end{cases}$$

$$\boxed{r_0: \; y = -\frac{8}{9}x + \frac{11}{16}}$$

intersezione retta - bisettrice

$\boxed{1b}$

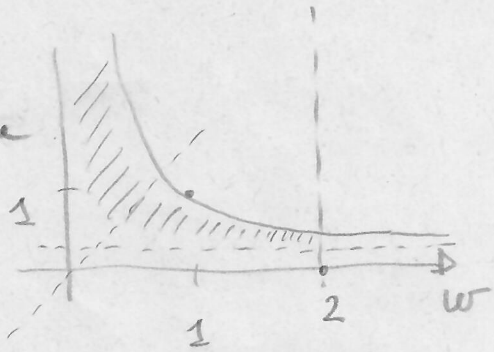
$$\begin{cases} y = -\dfrac{8}{9}x + \dfrac{11}{6} \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x + \frac{8}{9}x = \frac{11}{6} \Rightarrow x = \frac{\cancel{9}}{17}\cdot\frac{11}{\cancel{6}} = \frac{33}{34}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{VA}[W_{\delta_0}] = 33/34}$$

intersezione bisettrice, frontiera inferiore

$\boxed{c}$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{K_M[W_{\delta_M}] = \frac{1}{2}}$$



OSSERV: era possibile (in funzione di quanto scritto nel testo) utilizzare una diversa S_Δ. Entrambe le soluzioni sono state considerate valide.

4 punti

2. Svolgere i seguenti esercizi.

2 (a) Considerare il problema di decisione in cui $\Omega = \Delta = \mathbb{R}$ e $W_\delta(\omega) = |\omega - \delta|$. Determinare l'espressione del criterio della soglia critica che si ottiene utilizzando la funzione di densità $p(\omega) = \mathrm{N}(\omega|0,1)$ e un generico valore-soglia $\lambda > 0$.

2 (b) Considerare il problema di decisione in cui $\Omega = \Delta = \mathbb{R}^+$ e $W_\delta(\omega) = \omega^{-1}|\omega - \delta|$. Determinare l'espressione del criterio del valore atteso che si ottiene utilizzando la funzione di densità $p(\omega) = \mathrm{Ga}(\omega|\alpha,\beta)$ e la decisione ottima δ^*.

a)

$$K_{SC}[W_\delta] = \mathbb{P}[W_\delta > \lambda] = \mathbb{P}[|\omega - \delta| > \lambda] = \mathbb{P}[\omega - \delta > \lambda] + \mathbb{P}[\omega - \delta < -\lambda]$$

$$= \mathbb{P}[\omega > \delta + \lambda] + \mathbb{P}[\omega < \delta - \lambda]$$

$$= 1 - \Phi(\delta + \lambda) + \Phi(\delta - \lambda)$$

b)

$$K_{VA}[W_\delta] = \int_{\mathbb{R}} \omega^{-1}|\omega - \delta|\, p(\omega)\, d\omega$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \omega^{-1}|\omega - \delta| \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega^{\alpha-1} e^{-\beta\omega}\, d\omega$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\omega - \delta| \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega^{(\alpha-1)-1} e^{-\beta\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} \int_{\mathbb{R}} |\omega - \delta|\, p'(\omega)\, d\omega$$

IMP

$\hookrightarrow \mathrm{Ga}(\theta|\alpha-1,\beta)$

$$\Rightarrow \delta^* = \mathrm{Med}[\mathrm{Ga}(\alpha-1,\beta)]$$

[W8]

$\Rightarrow$ δ^*

MARGHERITA CARLUCCI	[illegible]
DE SANTIS Fulvio	Fulvio De Santis
STEFANIA GUBBIOTTI	Stefania Gubbiotti
MAURO GASPARINI	[illegible]
STEFANO FACHIN	[illegible]
Pierpaolo Brutti	[illegible]
LUCA TARDELLA	[illegible]

I seguenti soci della Società Italiana di Statistica propongono la candidatura del Socio **Giuseppe Arbia** alla carica di Presidente della Società Italiana di Statistica.

MARGHERITA CARLUCCI	[illegible]
DE SANTIS Fulvio	Fulvio De Santis
STEFANIA GUBBIOTTI	Stefania Gubbiotti
MAURO GASPARINI	[illegible]
STEFANO FACHIN	[illegible]
Pierpaolo Brutti	[illegible]
LUCA TARDELLA	[illegible]

Roma, 2 luglio 2019