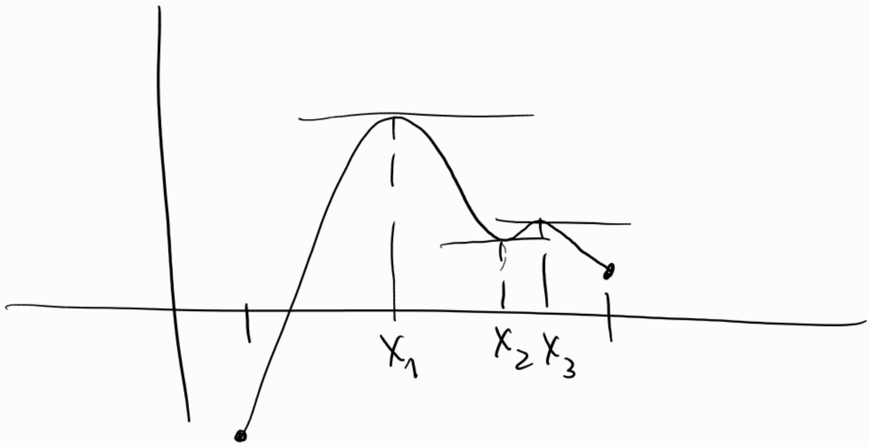
Teorema di Fermat sugli estremi locali:

$f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), derivabile in $x_0 \in I$.

x_0 sia interno a I (cioè non è uno degli estremi di I)

Se x_0 è un punto di estremo locale di f (pto di max locale o min. locale)

allora $f'(x_0) = 0$.



Dim. del teorema di Fermat.

Supponiamo che x_0 sia di min. locale per f.

cioè: $\exists$ intorno $\mathcal{U}$ di x_0 t.c. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathcal{U} \subseteq I$

Sia $x \in \mathcal{U}$, $x > x_0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$ per la perm. del segno.

Sia ora $x \in \mathcal{U}$, $x < x_0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ per la permanenza del segno

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow f'(x_0) = 0. \qquad \square$$

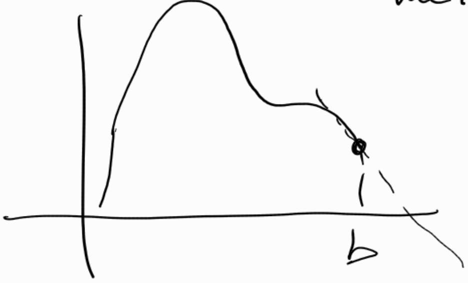
Cosa succederebbe se x_0 fosse un estremo dell'intervallo?

Per es. $I = [a,b]$,

$x_0 = b$ pto di min. locale
f derivabile in b.

$\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

perché posso fare solo metà della dim.



DEF Diremo che x_0 è un punto critico (o stazionario) di f se $f'(x_0)=0$

Cosa dice il thm di Fermat?

Se x_0 è un punto interno di I in cui f è derivabile, allora

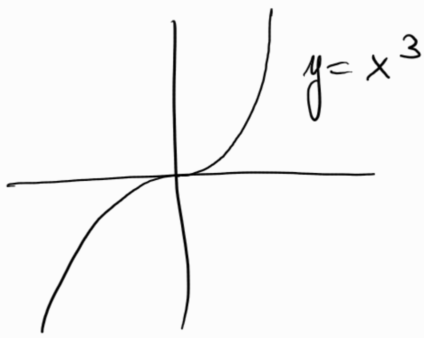
x_0 è pto di estremo locale di f $\Rightarrow$ x_0 è pto critico di f.

Vale la freccia "$\Leftarrow$"? NO,

per es. se $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

$x_0=0$ è punto critico di f.

ma non è né ~~di~~ di max. né di min. locale.



OSS Ci possono essere pti di max/min locale in cui f è continua ma non derivabile

Per es $f(x)=|x|$ ha un minimo assoluto in $x_0=0$ ma non è derivabile in tale pto.

COROLLARIO Sia $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), e sia x_0 un pto di max/min locale di f. Allora vale una di queste tre possibilità:

1) x_0 è un pto critico ($f'(x_0)=0$) interno all'intervallo;

2) x_0 è uno dei due estremi dell'intervallo;

3) f non è derivabile in x_0.

Applicazione al teorema di Weierstrass:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Per Weierstrass, f ammette max. e min. assoluti (che sono anche max/min. locali).

Quindi i pti di estremo assoluto si trovano in uno dei tre casi del Corollario precedente.

Trovare max e min. assoluti di $f(x) = x^3 - 5x + 1$ nell'intervallo $[-1, 2]$.

Per Weierstrass, essi esistono. Dove stanno?

In una delle tre categorie precedenti. Esaminiamole.

2) Gli estremi dell'intervallo: $x = -1$, $x = 2$.

3) Pti di non derivabilità: non ci sono.

1) I pti critici interni. $f'(x) = 3x^2 - 5 = 0$

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}} \qquad \cancel{x = -\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

non appartiene all'intervallo

$f(x) = x^3 - 5x + 1$

$$f(-1) = -1 + 5 + 1 = 5$$

max. assoluto

$$f(2) = 8 - 10 + 1 = -1$$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{5\sqrt{5} - 15\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + 1 = -\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + 1$$

$\wedge$

-1

min. assoluto

-1 è pto di max. assoluto

$\sqrt{\frac{5}{3}}$ è pto di min. assoluto.

Esercizio: Calcoliamo max. e min. assoluti di

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

dom $f = [-1, 1]$, f è continua.

Per Weierstrass esistono max. e min. assoluti. Li cerco.

2) gli estremi dell intervallo: $x=-1$, $x=1$;

3) i pti di possibile non derivabilità $\left.\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\}$ già considerati

$x = \frac{1}{2}$

1) i pti critici: Calcolo f' per $x \in (-1,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x + \frac{1}{2} & x \in [-1, \frac{1}{2}) \\ \sqrt{1-x^2} + x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} - 1 & x \in (-1, \frac{1}{2}) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$x \in (-1, \frac{1}{2})$ $\qquad$ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 = 0$

$$\boxed{-x = \sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{cases} x \in (-1, \frac{1}{2}) \\ -x \geq 0 \quad \boxed{x \leq 0} \\ x^2 = 1 - x^2 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Solus

$$\boxed{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Altro intervallo:

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ x = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \cancel{x \geq 0} \\ x^2 = 1 - x^2 \end{cases} \qquad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

I 5 candidati sono $x = \pm 1, \ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

$f(1) = \frac{1}{2}$; $\quad 0{,}5$ $\quad$ min. ass. (assunto in $x = 1$)

$f(-1) = \frac{3}{2}$; $\quad 1{,}5$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \approx 0{,}86$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}91$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \approx 1{,}91$ $\quad$ max. assoluto (assunto in $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

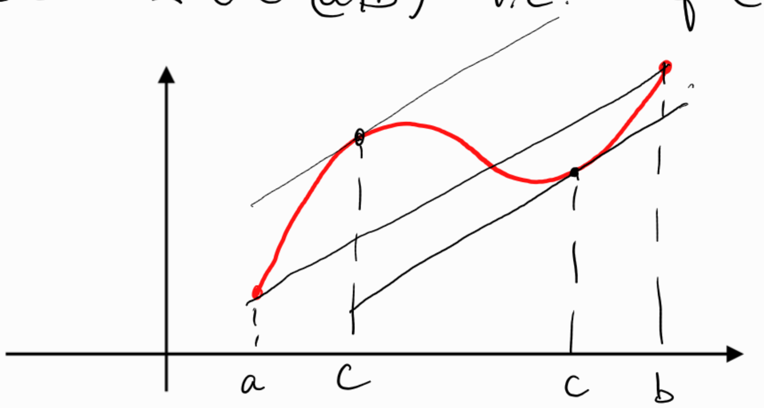
Esercizio: controllare che $x = \pm 1$ sono pti a tg. verticale e $x = \frac{1}{2}$ è un pto angoloso.

Teorema di Lagrange:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ f continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $\quad f'(c) = \boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}}$

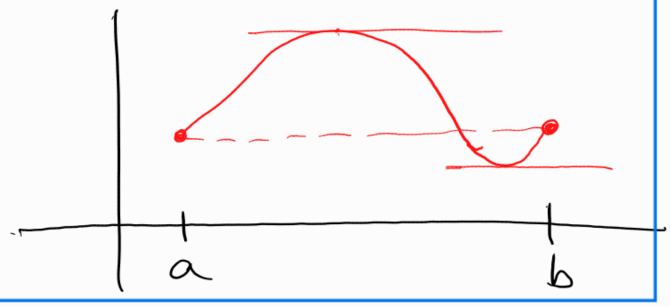
coeff^{te} angolare della retta passante per $(a, f(a)), (b, f(b))$



Il teorema afferma che $\exists$ (almeno) un $c \in (a,b)$ t.c. la retta tg. al grafico di f in $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

Il caso particolare in cui $f(a) = f(b)$ si chiama Teorema di Rolle.

TEOREMA di ROLLE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b). $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



Dim. Rolle: Per Weierstrass, f ammette max e min. assoluti: 2 possibilità:

1) Entrambi sono assunti negli estremi.

$$\Rightarrow \max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f = f(a) = f(b) \Rightarrow f \text{ è costante}$$

In tutti i pti $c \in [a,b]$ $f'(c) = 0$.

2) Almeno uno dei due estremi assoluti è assunto all'interno, sia c un punto (interno) di max/min assoluto

$\Rightarrow$ per Fermat $f'(c) = 0$ $\square$

Dim. Lagrange Mi riconduco al teor. di Rolle.

Definisco
$$g(x) = f(x) - \left[\text{retta passante per } (a, f(a)), (b, f(b)) \right]$$

$$y = \underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(x-a)} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

continua in $[a,b]$
derivabile in (a,b) $\Big\}$ perché f lo era.

$$g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$$

$$g(b) = \cancel{f(b) - f(a)} - \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a})} = 0$$

g verifica le ipotesi di Rolle $\Longrightarrow \exists\, c$ t.c. $g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

Teor. di Cauchy. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue in $[a,b]$, derivabile in (a,b).
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c) \qquad \longleftarrow$$

Quest'ultima formula si scrive nella forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ se i denominatori sono $\neq 0$

Dim. Cauchy. si applica Rolle alla funzione

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x) \qquad \square$$

Criterio differenziale di monotonia

Sia I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I, derivabile nei pti interni di I. Allora:

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ crescente in I

2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ decrescente in I

3) $f'(x) > 0 \ \forall x$ interno a $I \Rightarrow f$ strett. crescente in I.

4) $f'(x) < 0 \ \forall x$ interno a $I \Rightarrow f$ strett. decrescente in I.

OSS In 3) e 4) non vale l'implicazione $\boxed{\Leftarrow}$

Per es. $f(x) = x^3$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $x = 0$.

Dim. 1) "$\Leftarrow$"

Sia f crescente (cioè: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$)

Studio il segno del rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

se $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow$ il rapp. incr è ≥ 0

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow$ il " " " ≥ 0

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0)} \geq 0$$ per la permanenza del segno

$\square$

Dim $\boxed{1 \text{ "}\Rightarrow\text{"}}$ $\boxed{3 \text{ "}\Rightarrow\text{"}}$ (scrivo le modifiche in blu)

Supponiamo $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ interno a I.

Siano $x_1, x_2 \in I$ t.c $x_1 < x_2$. Voglio provare che
$f(x_1) \leq f(x_2)$

Applico Lagrange all' intervallo $[x_1, x_2]$

f continua in $[x_1, x_2]$
derivabile in (x_1, x_2). $\xRightarrow[\text{Lagrange}]{}$ $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c) \underset{>}{\geq} 0 \quad \text{per ipotesi}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) \underset{>}{\geq} f(x_1) \qquad \square$$