Da un testo di esame:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+2x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Trovare i valori α, β che rendono vera ciascuna delle seguenti:

a) f è continua in $\mathbb{R}$ Risp. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) f è derivabile in $\mathbb{R}$ Risp $\beta = \frac{1}{\pi}$, α qualsiasi

c) ...

d) ...

Problemi di continuità e derivabilità solo in $x=0$.

In $x=0$ la funzione è continua da destra.

Continuità da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+2x^2)}{x \cdot 2x}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{2x}}_{\downarrow\, 0} = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Derivabilità in $x=0$

Occorre che f sia continua in $x=0$, ma questo è vero $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

f derivabile da destra in $x=0$,

e $$f'_+(0) = \left(\alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x)\right)'\Big|_{x=0} =$$

$$= \left(4\alpha x^3 + 2\pi\beta \cos(2\pi x)\right)\Big|_{x=0} = 2\pi\beta$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\log(1+2h^2)}{h^2} = 2$$

f derivabile in $x=0 \iff f'_+(0) = f'_-(0) \iff 2\pi\beta = 2$

$\iff \beta = \frac{1}{\pi}$

Derivata della funzione inversa

Siano I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotòna

(quindi: 1) im f è un intervallo J; $f: I \to J$ biiettiva.

2) $\exists\, f^{-1}: J \to I$ strett. monotòna e continua)

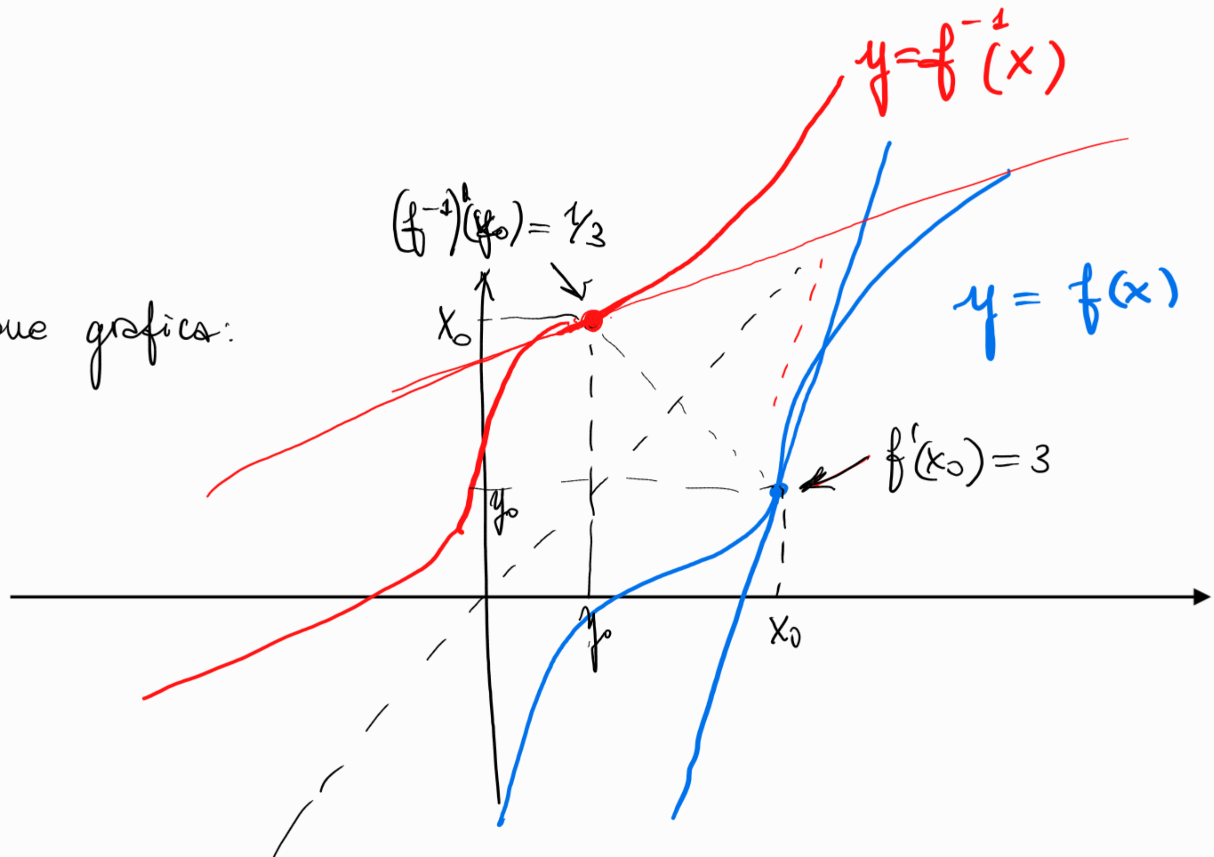
Se f è derivabile in $x_0 \in I$, e $f'(x_0) \neq 0$, allora

f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e si ha

$\iff x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Spiegazione grafica:



Esempio: $f(x) = 1 + 2x + x^5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

derivabile e strett. crescente, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente e continua.

f^{-1} non riesco a scriverla esplicitamente:

dovrei risolvere nella variabile x l'eq^{ue} $1+2x+x^5 = y$.

$f'(x) = 2 + 5x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il teorema dice che f^{-1} è derivabile in ogni y.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2+5x^4}\Big|_{x = f^{-1}(y)}$$

dove x è tale che $f(x) = y$. $(x = f^{-1}(y))$

L'espressione resta non esplicita in quanto non è nota $f^{-1}(y)$

Tuttavia per alcuni y si trova $(f^{-1})'(y)$.

Per es. $f(0) = 1 \qquad x_0 = 0,\ y_0 = 1.$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2};$$

$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2+5x^4}\Big|_{x=1} = \frac{1}{7};$$

$f(x) = x^2 : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$

strett. crescente, derivabile, biiettiva; $f'(x) = 2x > 0$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

Il teorema dice: $\forall y_0 > 0$, sia x_0 t.c. $x_0^2 = y_0$

cioè $x_0 = f^{-1}(y_0) = \sqrt{y_0}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \qquad \forall y_0 > 0.$$

Abbiamo ritrovato $(\sqrt{y})' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \quad \forall y > 0.$

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ strett. crescente, derivabile, biiettiva.

$f'(x) = e^x > 0$

Posso applicare il teorema $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall y \in (0,+\infty)$

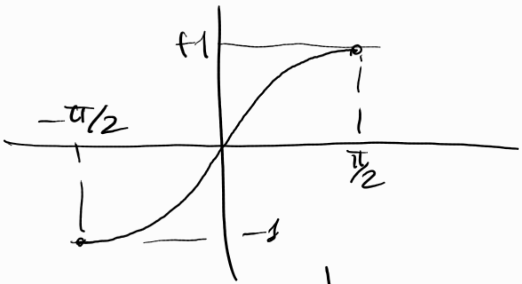
$$(\log y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)\big|_{x=f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^x\big|_{x=\log y}} = \frac{1}{y}$$

$f(x) = \sin x\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$

strett. crescente, derivabile $f'(x) = \cos x$

biiettiva:

$f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.



$y = \sin x\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

Posso applicare il teorema $\forall x$ t.c. $f'(x) = \cos x \neq 0. \Rightarrow \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \forall y \in (-1,1)$

$\forall y \in (-1,1)$

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} =$$

scelgo il + perché $\arcsin y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\boxed{D\,(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$f(x) = \cos x\big|_{[0,\pi]} \; : \; [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

strett. decrescente, derivabile: $f'(x) = -\sin x$

biiettiva.

$f^{-1}(y) = \arccos y \; : \; [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$f'(x) = -\sin x \neq 0 \qquad \forall x \in (0,\pi) \Rightarrow y \in (-1,1)$

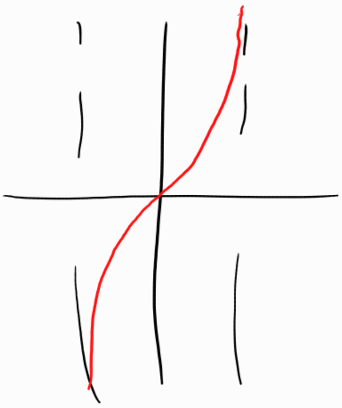
$$(\arccos y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)\big|_{x=\arccos y}} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} =$$

$$= -\frac{1}{\pm\sqrt{1-(\cos(\arccos y))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

scelgo il "+" perché $\arccos y \in (0,\pi)$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

Derivata di arctg.



$f(x) = \operatorname{tg} x\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \; : \; \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

strett. crescente, derivabile $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$

biiettiva

$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Posso applicare il teorema $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cioè $\forall y \in \mathbb{R}$.

$$(\operatorname{arctg} y)' = (f^{-1})'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=\operatorname{arctg} y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Dim. teorema

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$

$x = f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f^{-1}(y_0) = x_0$ per la continuità di f^{-1}

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \square$$

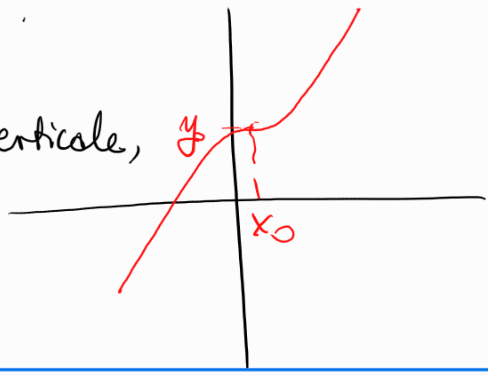
Estensione del teorema:

$f: I \to J$ strett. crescente (decrescente), continua e biiettiva.

Sia $x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0) = 0$.

Allora f^{-1} ha in $y_0 = f(x_0)$ un pto a tg. verticale,

cioè $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ $(-\infty)$



Applicazioni:

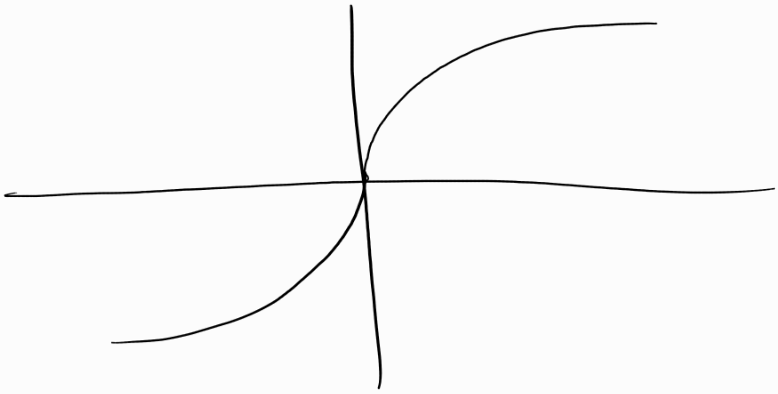
1) $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente, derivabile, biiettiva.

$f'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$ $\qquad x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

$(f^{-1})'(0) = +\infty$

(già noto).



---

2) $f(x) = \sin x\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

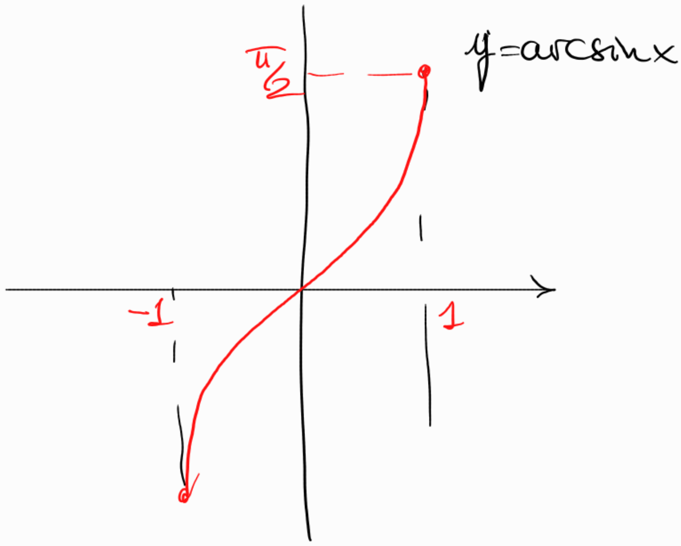
strett. crescente, derivabile $f'(x) = \cos x$
biiettiva.

$f^{-1}(y) = \arcsin y$.

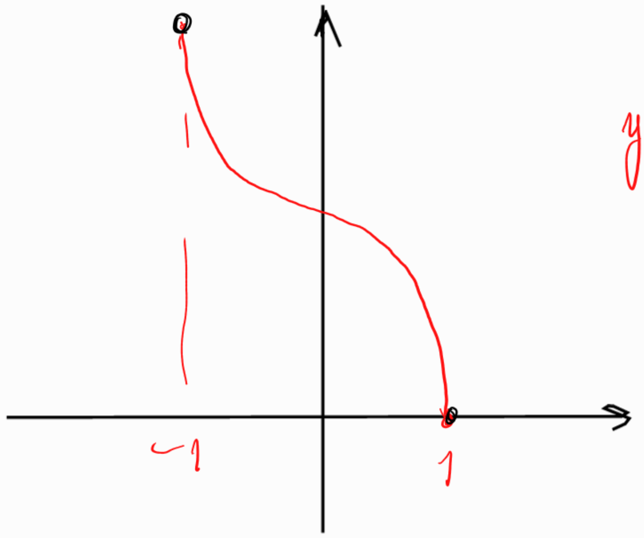
se $x_0 = -\frac{\pi}{2} \iff y_0 = -1$

$x_0 = \frac{\pi}{2} \iff y_0 = +1$ $\qquad f'(x_0) = \cos x_0 = 0$

$\Longrightarrow (f^{-1})'(y_0) = +\infty$.



Allo stesso modo, si trova che la derivata di $\arccos x$ in $x = \pm 1$ vale $-\infty$



$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^2+e^x\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x^2+e^x\right)^2}\left(2x+e^x\right)$$

Estremi relativi (o locali) di una funzione.

$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si dice **punto di massimo (minimo) assoluto** (o "globale") di f (in X) un $x_0 \in X$ t.c.

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X \qquad (\leq)$$

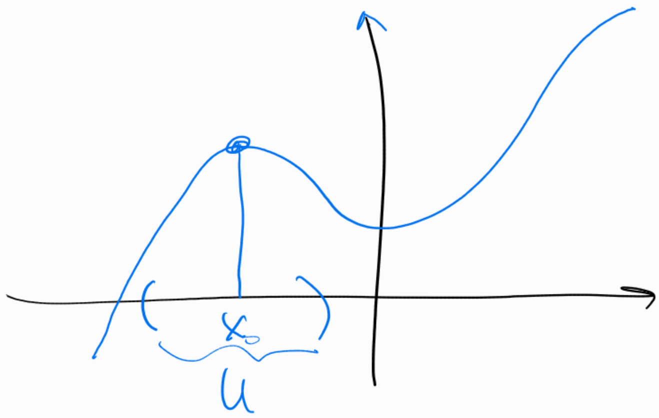
pti di massimo o minimo assoluti si chiamano anche **punti di estremo assoluto**.

$x_0 \in X$ si dice **punto di massimo (minimo) relativo, o locale** di f se $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X \cap U \qquad (\leq)$$

Ovviamente un pto di estremo assoluto (massimo o minimo) è anche pto di estremo locale.

Il viceversa non è sempre vero.



Teorema di Fermat sugli estremi locali:

$f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), derivabile in $x_0 \in I$.

x_0 sia interno a I (cioè non è uno degli estremi di I).

Se x_0 è un punto di estremo locale di f (pto di max locale o min. locale)

allora $f'(x_0) = 0$.