Laboratorio di decisioni statistiche - Lab. 6 – 2024-2025 - 05 novembre 2024

Cognome, nome, matricola: ____

1. **(MC - Inferenza a posteriori)**.
   $X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d.
   $\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

   Parametri/dati:

   - $\alpha = 2$
   - $\beta = 2$
   - $\sum_{i=1}^{n} x_i = 4$
   - $n = 10$

   (a) **Valori esatti (formule)**.

   $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] =$ $\mathbb{P}[\Theta < 0.3|\mathbf{z}_n] =$ $\mathrm{q}_{0.95}(\mathbf{z}_n)$

   (b) **Approssimazioni con metodo Monte Carlo (MC)**.
   - `th.MC`, vettore di M valori simulati da $\pi(\theta|\mathbf{z}_n)$
   - `post.mean.MC`=
   - `post.prob.MC`=
   - `post.quant.MC`=

   $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] =$ $\mathbb{P}[\Theta < 0.3|\mathbf{z}_n] =$ $\mathrm{q}_{0.95}(\mathbf{z}_n)$

   (c) **Grafici**

   Istogramma di `th.MC` e grafico di $\pi(\theta|\mathbf{z}_n)$

   (d) **ET Intervals**.
   Intervallo ET 0.95 per θ

   Approssimazione di MC per intervallo ET 0.95 per θ

   $C = [\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots]$ $\widetilde{C} = [\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots]$

   (e) **Invarianza degli intervalli ET**

   Considera
   $$\psi = \ln \frac{\theta}{1-\theta}.$$
   - Ottieni M valori pseudo-casuali da ψ
   - Calcola l'approssimazione di MC per intervallo ET 0.95
   - Verifica la proprietà di invarianza dell'insieme ET

2. **(MC - distribuzione predittiva a priori)**.

   modello normale.

   - Simulare M valori da $m(\overline{y}_m)$.
   - Mostrare che $\mathbb{E}[\overline{Y}_m] = \mu_0$.
   - Mostrare che $\mathbb{V}[\overline{Y}_m] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{m}\right)$.

   Porre: $M = 10000$, $m = 8$, $\mu_0 = 2$, $n_0 = 5$, $\sigma = 1$.

3. **(MC - distribuzione predittiva a posteriori)**.

   modello normale.

   - Simulate M valori da $m(\overline{y}_m|\overline{x}_n)$.
   - Mostrare che $\mathbb{E}[\overline{Y}_m|\overline{x}_n] = \frac{n_0\mu_0 + n\overline{x}_n}{n_0+n}$.
   - Mostrare che $\mathbb{V}[\overline{Y}_m|\overline{x}_n] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_0+n} + \frac{1}{m}\right)$.

   Porre: $M = 10000$, $m = 8$, $\mu_0 = 2$, $n_0 = 5$, $\sigma = 1$, $n = 6$, $\overline{x}_n = 0.5$.

4. **(Approssimazione di MC della probabilità di copertura di un insieme di credibilità)**.

   - $X_1, ..., X_n|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$, i.i.d.
   - $\Theta \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
   - $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{Beta}(\frac{1}{2} + \sum x_i, \frac{1}{2} + n - \sum x_i)$
   - C_α^{ET} (intervallo ET).

   (a) Assumere $n = 5$ e $\tilde{\theta} = \frac{1}{4}$.
   (b) Fornire l'approssimazione di MC della probabilità di copertura di C_α^{ET}.
   (c) Repetere per $n = 10, 20, 100$.

5. **(Probabilità predittiva di un successo).**

   - $X_i|\theta \sim \text{N}(\theta, \sigma^2)$ i.i.d.
   - $\Theta \sim \text{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0})$.
   - $\overline{Y}_m|\theta \sim \text{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{m})$ (future data).
   - $R = \left\{\mathbf{y}_n : \frac{\sqrt{m}|\overline{y}_m - \theta_0|}{\sigma} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$.
   - $\mathbb{P}$[Successo]=$\mathbb{P}[R]$.

   Fornire valori esatti e approssimazioni MC per le seguenti quantità.

   (a) Prob. predittiva a priori di successo. Assumere: $n_0 = 5$, $\mu_0 = 2$, $m = 6$, $\sigma^2 = 1$, $\theta_0 = 3$, $\alpha = 0.05$.
   (b) Prob. predittiva a posteriori di successo. Assumere: $n_0 = 5$, $\mu_0 = 2$, $m = 6$, $\alpha = 0.05$, $n = 10$, $\overline{x}_n = 4$.
   (c) Intervallo predittivo a posteriori per $\overline{Y}_m$ (livello $1 - \gamma = 0.95$).