Esercizi di Teoria Statistica delle Decisioni (F. De Santis)
Parte 1: Inferenza bayesiana
a.a. 2024-2025

1. **(Beta-Binomial model)**. Let $X_1, \ldots, X_n$ be a Bernoulli random sample of parameter θ, with probability mass function

$$p_\theta(x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \qquad \theta \in [0,1].$$

Consider a prior distribution for θ from the Beta family, with probability density function

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

(a) Determine likelihood function and MLE for θ.

(b) Verify that the Beta family is conjugate to the Bernoulli model and determine the hyperparameter ($\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$) of the posterior distribution of θ.

(c) Knowing that $\mathbb{E}[\theta] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, determine $\mathbb{E}[\theta|\mathbf{z}_n]$ (posterior expected value of θ).

(d) Plot the prior density assuming $\alpha = 9.2$ and $\beta = 13.8$.

(e) Compute the prior probabilities that $\Theta > 0.2$ and that $\Theta \in [0.2, 0.6]$.

(f) Assume $\sum_{i=1}^n x_i = 15$ and $n = 20$. Plot in the same figure the prior density, the likelihood function and the posterior density.

(g) Compute posterior mean, mode, median and variance of Θ.

(h) Compute the posterior probabilities that $\Theta > 0.2$ and that $\Theta \in [0.2, 0.6]$ and compare to prior probabilities.

(i) Compute prior and posterior quantiles of level 0.025 and 0.975.

(j) Repeat the analysis assuming $\sum_{i=1}^n x_i = 30$ and $n = 40$.

(k) Repeat the analysis assuming $\alpha = 1$ and $\beta = 1$.

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) = \theta^{s_n}(1-\theta)^{n-s_n}$, $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$; $\widehat{\theta}_{mv} = \overline{x}_n$.

(b) $\pi(\theta|\mathbf{x}_n) \propto \theta^{\overline{\alpha}-1}(1-\theta)^{\overline{\beta}-1}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + s_n$, $\overline{\beta} = \beta + n - s_n$.

(c) $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}} = \frac{\alpha+s_n}{\alpha+\beta+n}$.

(d) Con `R`: porre `al` $= 9.2$ e `be` $= 13.8$; il grafico si ottiene con `curve(dbeta(x, shape1 = al, shape2 = be), from = 0, to = 1)`.

(e) Con `R`: `1 - pbeta(0.2, shape1 = al, shape2 = be) = 0.98`;
`pbeta(0.6, shape1 = al, shape2 = be) - pbeta(0.2, shape1 = al, shape2 = be) = 0.96`.

(f) Porre `sn = 15, n = 20, al.p = 9.2 + 15 = 24.2ebe.p = 13.8 + 20 - 15 = 18.8`;
prior: `curve(dbeta(x, al, be), from = 0, to = 1)`,
posterior: `curve(dbeta(x, al.p, be.p), lty = 2, add = TRUE)`,
likelihood: `curve(dbeta(x, sn + 1, n - sn + 1), lty = 3, add = TRUE)`.

(g) valore atteso=0.562; moda=0.565; mediana=`qbeta(0.5, al.p, be.p)`=0.563.
Risp.: 0.99; 0.66.

(h) `qbeta(0.025, al.p, be.p)` $= 0.414$; `qbeta(0.975, al.p, be.p)` $= 0.706$.

(i) Ripeti quanto fatto sopra ponendo `sn = 30` e `n = 40`.

(j) Ripeti quanto fatto sopra ponendo `al = be = 1`.

2. **(Beta-Binomial model)**. Let $X_1, \dots, X_n$ be a random sample (i.i.d.) a Bernoulli random variable of parameter θ, with probability mass function

$$p_\theta(x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \qquad \theta \in [0,1].$$

Consider a prior distribution for θ from the Beta family, with probability density function

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Assume that θ is the unknown probability of observing a given disease in a population and let X_i indicate the presence/absence of the disease in a sample unit.

(a) Prior information: Formalized with a Beta(2,20) density.

(b) Data: $n = 20$, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Answer the following questions.

(a) Plot the likelihood and comment.

(b) Plot the prior distribution and comment.

(c) Compute $\mathbb{E}[\Theta]$, $\text{Mo}[\Theta]$, $\text{Med}[\Theta]$, $\mathbb{P}[\Theta < 0.10]$, $\mathbb{P}[0.05 < \Theta < 0.20]$.

(d) Determine the posterior distribution of Θ and plot it together with prior and likelihood.

(e) Compute [with respect to $\pi(\theta|\mathbf{z}_n)$]: $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n]$, $\text{Mode}[\Theta|\mathbf{z}_n]$, $\text{Median}[\Theta|\mathbf{z}_n]$, $\mathbb{P}[\Theta < 0.10|\mathbf{z}_n]$, $\mathbb{P}[0.05 < \Theta < 0.20|\mathbf{z}_n]$.

(f) Compute and compare the .95 prior and posterior equal-tailed credible sets.

(g) Compute the MLE of θ and compare it to the posterior mean.

(h) Compute the and the .95 confidence interval for θ and compare it to the .95 ET credible interval.

(i) **Sensitivity analysis**. Consider the expression:

$$\widehat{\theta}_B = \frac{n}{n+n_0}\overline{x}_n + \frac{n_0}{n+n_0}\theta_0,$$

where $n_0 = \alpha + \beta$ and $\theta_0 = \mathbb{E}[\Theta]$.

- Draw a plot that describes the change in $\widehat{\theta}_B$ as n_0 ranges in [1,25].
- Draw a plot that describes the change in $\widehat{\theta}_B$ as θ_0 ranges in [0,0.5].

Soluzione.

(a) Con R: porre $\texttt{sn} = \texttt{0}$ e $\texttt{n} = \texttt{20}$; il grafico della funzione di verosimiglianza si ottiene con $\texttt{curve(dbeta(x, sn + 1, n - sn + 1), from = 0, to = 1)}$,
$\texttt{xlab = expression(theta), ylab = ""}$.

(b) Porre $\texttt{al} = \texttt{2}$ e $\texttt{be} = \texttt{20}$; il grafico della densità a priori si ottiene con $\texttt{curve(dbeta(x, shape1 = al, shape2 = be), add = TRUE, lty = 2)}$.

(c) valore atteso=0.09; moda=0.05, mediana=$\texttt{qbeta(0.5, al, be)}$=0.08; $\mathbb{P}[\Theta < 0.10] = \texttt{qbeta(0.1, al, be)} = 0.636$, $\mathbb{P}[0.05 < \Theta < 0.20] = \ldots = 0.659$.

(d) Porre $\texttt{al.p} = \texttt{al} + \texttt{sn}$ e $\texttt{be.p} = \texttt{be} + \texttt{n} - \texttt{sn}$; il grafico della d. a posteriori si ottiene con $\texttt{curve(dbeta(x, al.p, be.p), add = TRUE, lty = 3)}$.

(e) $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 0.048$, $\text{Mo}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 0.025$, $\text{Me}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \texttt{qbeta(0.5, al.p, be.p)} = 0.041$, $\mathbb{P}[\Theta < 0.10|\mathbf{z}_n] = \texttt{qbeta(0.1, al.p, be.p)} = 0.926$, $\mathbb{P}[0.05 < \Theta < 0.20|\mathbf{z}_n] = \ldots = 0.384$.

(f) Intervallo ET a priori: $C = [L, U]$ con $\texttt{L} = \texttt{qbeta(0.025, al, be)}$ e $\texttt{U} = \texttt{qbeta(0.975, al, be)}$. Si ottiene $\texttt{C} = [\texttt{0.012}, \texttt{0.238}]$; analogamente per intervallo a posteriori: $\texttt{C.p} = [\texttt{0.006}, \texttt{0.129}]$.

(g) $\widehat{\theta}_{mv} = \overline{x}_n = 0/20 = 0 < 0.048$ (osservare effetto della distribuzione iniziale).

(h) IC frequentista: $\overline{x}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}_n(1-\overline{x})}{n}}$, quindi qui non si può calcolare dal momento che $\overline{x}_n = 0$, a differenza dell'insieme di credibilità.

(i) Per scrivere una funzione di n_0: $\texttt{al = 2, be = 20, th0 = al/(al + be), n = 20, xmed = 0}$.
Quindi:
$\texttt{th.B = function(n0)\{n/(n + n0) * xmed + n0/(n + n0) * th0\}}$
$\texttt{curve(th.B(x), from = 1, to = 25)}$
Analogamente per la funzione di θ_0.

3. **(Gamma − Poisson)**. Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample (i.i.d.) a Poisson random variable of parameter θ, with probability mass function

$$p_\theta(x_i) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}, \qquad x_i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \theta > 0.$$

Consider a prior distribution for θ from the Gamma family, with probability density function

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Recall that

$$\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \mathbb{V}[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta^2}, \qquad \mathbb{M}[\Theta] = \frac{\alpha - 1}{\beta}.$$

(a) Determine likelihood function and MLE for θ.

(b) Verify that the Gamma family is conjugate to the Poisson model and determine the hyperparameter ($\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$) of the posterior distribution of θ.

(c) Determine $\mathbb{E}[\theta|\mathbf{x}_n]$ (posterior expected value of θ).

(d) Plot the prior density in the interval [0,10], assuming $\alpha = 6$ and $\beta = 2$.

(e) Compute the prior probabilities that $\Theta > 3$ and that $\Theta \leq 5$.

(f) Assume $\sum_{i=1}^{n} x_i = 18$ and $n = 5$. Plot in the same figure the prior density, the likelihood function and the posterior density.

(g) Compute posterior mean, mode, median and variance of Θ.

(h) Compute now the posterior probabilities that $\Theta > 3$ and that $\Theta \leq 5$ and comment.

(i) Compute prior and posterior 0.95 ET intervals.

(j) Repeat the analysis assuming $\sum_{i=1}^{n} x_i = 36$ and $n = 10$; repeat the analysis assuming $\sum_{i=1}^{n} x_i = 18$, $n = 5$, $\alpha = 1$ and $\beta = 0$.

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) \propto \theta^{s_n} \mathrm{e}^{-n\theta}, \quad$ con $\theta > 0$ e $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ [proporzionale a densità $\mathrm{Ga}(s_n + 1, \texttt{rate} = n)$].

(b) $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{\overline{\alpha}-1} \mathrm{e}^{-\overline{\beta}\theta}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + s_n$ e $\overline{\beta} = \beta + n$.

(c) Usare integrale gamma (vedi libro/dispense) per ottenere analiticamente che $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

(d) Il grafico della densità a priori si ottiene con

```
curve(dgamma(x,shape=al,rate=be),from=0,to=10, xlab=expression(theta),
ylab="")
```

(e) $1 - \texttt{pgamma}(3, \texttt{al}, \texttt{rate} = \texttt{be}) = 0.45$; $\texttt{pgamma}(5, \texttt{al}, \texttt{be}) = 0.93$.

(f) Porre: $\texttt{al} = 6, \texttt{be} = 2, \texttt{n} = 5, \texttt{sn} = 18, \texttt{al.p} = \texttt{al} + \texttt{sn}, \texttt{be.p} = \texttt{be} + \texttt{n}$. I grafici di verosimiglianza e densità a posteriori si sovrappongono a quello ottenuto per la densità a priori come segue:
$\texttt{curve}(\texttt{dgamma}(\texttt{x}, \texttt{shape} = \texttt{sn} + 1, \texttt{rate} = \texttt{n}), \texttt{add} = \texttt{TRUE}, \texttt{lty} = 2)$;
$\texttt{curve}(\texttt{dgamma}(\texttt{x}, \texttt{shape} = \texttt{al.p}, \texttt{rate} = \texttt{be.p}), \texttt{add} = \texttt{TRUE}, \texttt{lty} = 2)$.

(g) $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 3.43$, $\mathrm{Mo}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 3.29$, $\mathrm{Me}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 3.38$, $\mathbb{V}[\Theta|\mathbf{z}_n] = 0.49$,

(h) $1 - \texttt{pgamma}(3, \texttt{al.p}, \texttt{rate} = \texttt{be.p}) = 0.716$; $\texttt{pgamma}(5, \texttt{al.p}, \texttt{be.p}) = 0.979$.

(i) Intervallo ET a priori: $C = [L, U]$ con $\texttt{L} = \texttt{qgamma}(0.025, \texttt{al}, \texttt{rate} = \texttt{be})$ e $\texttt{U} = \texttt{qgamma}(0.975, \texttt{al}, \texttt{rate} = \texttt{be})$. Si ottiene $\texttt{C} = [1.1005.834]$; analogamente per intervallo a posteriori: $\texttt{C.p} = [2.1974.930]$.

(j) Ripetere sostituendo i valori.

(k) Ripetere sostituendo i valori.

4. **(Normal-Normal model)**. Consider a random sample of size n from $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ and a $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/n_0)$ prior for Θ. Assume that: $n = 2, \overline{x}_n = 130, \sigma^2 = 25$, $\mu_0 = 120$, $n_0 = 0.25$.

(a) Determine the posterior distribution of θ.

(b) Plot prior, likelihood and posterior in the same graphic.

(c) Determine and compare the three point estimates (prior, likelihood, posterior).

(d) Determine and compare the 3 interval estimates (prior HPD, confidence interval, posterior HPD).

(e) Consider the hypotheses $H_0 : \theta \le \theta_t$ vs. $H_1 : \theta > \theta_t$. Assume $\theta_t = 135$. Compute prior probability of H_0, posterior probability of H_0 and p.value. Compare.

(f) Repeat assuming $n_0 = 0$.

(g) Compare posterior probability of H_0 and p.value assuming $n_0 = 0$.

Soluzione.

(a) $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$, con $\mu_p = \frac{n_0\mu_0 + n\overline{x}_n}{n_0+n}$ e $\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{n_0+n}$.

(b) Porre: $\texttt{n} = 2, \texttt{xn} = 130, \texttt{sig2} = 25, \texttt{mu.0} = 120, \texttt{n0} = 0.25,$
$\texttt{sig2.0} = \texttt{sig2/n0}, \texttt{sd.0} = \texttt{sqrt(sig2.0)},$
$\texttt{sig2.p} = \texttt{sig2}/(\texttt{n0} + \texttt{n}), \texttt{sd.p} = \texttt{sqrt(sig2.p)}, \texttt{mu.p} = (\texttt{n0} * \texttt{mu.0} + \texttt{n} * \texttt{xmed})/(\texttt{n0} + \texttt{n}).$
Per i grafici:
- prior: $\texttt{curve(dnorm(x, mu.0, sd.0), from = 0, to = 1)}$,
- posterior: $\texttt{curve(dnorm(x, mu.0, sd.p), lty = 2, add = TRUE)}$,
- likelihood: $\texttt{curve(dnorm(x, xmed, sqrt(sig2/n)), lty = 3, add = TRUE)}$.

(c) $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \mathrm{Mo}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \mathrm{Me}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \texttt{mu.p} = 128.88$.

(d) - Intervallo ET a priori: $C = [L, U]$ con
$\texttt{L} = \texttt{qnorm(0.025, mu.0, sd.0)}$ e $\texttt{U} = \texttt{qnorm(0.975, mu0, sd.0)}$,
dove $\texttt{sd0} = \texttt{sqrt(sig2/n0)}$. Si ottiene $\texttt{C.prior} = [\texttt{96.736, 143.263}]$.
- Intervallo a posteriori: analogamente, si ottiene $\texttt{C.post} = [\texttt{121.134, 136.643}]$.
- Intervallo di confidenza: $\overline{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si ottiene: $\texttt{C} = [\texttt{121.775, 138.224}]$.

(e) Porre: $\texttt{th.t} = \texttt{135}$.
- probabilità a priori di H_0: `pnorm((th.t-mu.0)/sd.0)`=0.933
- probabilità a posteriori di H_0: `pnorm((th.t-mu.p)/sd.p)`=0.966
- p-value: $1 - \Phi(w_{oss})$, con $w_{oss} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_t)}{\sigma}$. Qui vale 0.921.

(f) Ripeti quanto fatto sopra con `n0=0`.

(g) Con $n : 0 = 0$ p-value e probabilità a posteriori di H_0 sono uguali e pari a 0.921.

5. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)$ un campione in cui le v.a X_i sono, condizionatamente a θ, i.i.d. con valore atteso $\mathbb{E}_\theta[X] = 1/\theta$ e funzione di massa di probabilità

$$p_\theta(x) = (1-\theta)^{x-1}\theta, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots \qquad \theta \in [0, 1].$$

(a) Verificare che la famiglia delle densità Beta(α, β), con $\alpha, \beta > 0$, è coniugata al modello in esame (per v.a. geometriche) e determinare i parametri della distribuzione a posteriori di Θ, $\pi(\theta|\mathbf{x}_n)$.

(b) Determinare l'espressione di $\widehat{\theta}_B(\mathbf{x}_n) = \mathbb{E}[\Theta|\mathbf{x}_n]$ e quello di $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$, stima di massima verosimiglianza del parametro.

(c) Supponendo che il campione abbia dimensione $n = 5$, che $\alpha = \beta = 2$ e che $s_n = \sum_{i=1}^n x_i = 6$, calcolare il valore numerico di $\widehat{\theta}_B$ e di $\widehat{\theta}_{mv}$.

(d) Determinare $\pi^J(\theta)$, la distribuzione a priori di Jeffreys per θ.

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) = (1-\theta)^{s_n - n}\theta^n$, con $\theta \in (0,1)$ e $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Pertanto, ricordando che $\pi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$, si ha che $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{\overline{\alpha}-1}(1-\theta)^{\overline{\beta}-1}$, con $\overline{\alpha} = \alpha+n$ e $\overline{\beta} = \beta+s_n-n$.

(b) - $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}} = \frac{\alpha+n}{\alpha+\beta+s_n}$;
- Si verifica che $\frac{d}{d\theta}\ln\ell(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{s_n}$ e che $\frac{d^2}{d\theta^2}\ln\ell(\theta) < 0$ per ogni $\theta \in (0,1)$. Quindi $\widehat{\theta}_{mv} = \frac{n}{s_n} = \frac{1}{\overline{x}_n}$.

(c) $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \frac{7}{10}$; $\widehat{\theta}_{mv} = \frac{5}{6}$.

(d) Si verifica che $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)}$; pertanto $\pi^J(\theta) = \sqrt{I_n(\theta)} \propto \frac{1}{\theta(1-\theta)^{1/2}}$.

6. Sia $\mathbf{Z}_n = (X_1, ..., X_n)$ un campione in cui le v.a X_i sono, condizionatamente a θ, i.i.d. con distribuzione EN(θ), ovvero con funzione di densità

$$p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}, \qquad x \geq 0, \qquad \theta > 0.$$

Si consideri inoltre per Θ la famiglia delle densità Gamma(α, β) coniugata al modello, $\alpha, \beta > 0$.

(a) Determinare le distribuzioni a posteriori di Θ e della v.a. $\Lambda = \Theta^{-1}$.

(b) Verificare che

$$\mathbb{E}[\Lambda|\mathbf{z}_n] = \frac{\beta+s_n}{\alpha+n-1}, \quad \text{dove} \quad s_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

(c) Calcolare l'informazione bayesiana I_B e verificare che (asintoticamente)

$$\Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}, \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}^2}\right). \tag{1}$$

(d) Utilizzando (1), determinare le generiche espressioni di $C_{1-\gamma}(\mathbf{x}_n)$, insieme HPD di livello $1-\gamma$ per θ, e della probabilità $\mathbb{P}[\Theta > \delta|\mathbf{z}_n]$.

(e) Utilizzando (1) e assumendo $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $n = 20$, $s_n = 2$, $\gamma = 0.05$ e $\delta = 5$, calcolare i valori numerici di $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n]$, $C_{1-\gamma}(\mathbf{z}_n)$ e $\mathbb{P}[\Theta > \delta|\mathbf{z}_n]$.

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) = \theta^n e^{-\theta s_n}$, con $\theta > 0$ e $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$; $\pi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$. Quindi $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \ell(\theta) \times \pi(\theta) = \theta^{\overline{\alpha}-1} \exp\{-\overline{\beta}\theta\}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + n$ e $\overline{\beta} = \beta + s_n$. Quindi $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{Ga}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$ e, di conseguenza, $\Lambda|\mathbf{z}_n \sim \text{InvGa}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$.

(b) Si verifica, ad esempio, osservando che $\mathbb{E}[\Lambda|\mathbf{z}_n] = \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\pi(\theta)d\theta$, con $\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$. L'integrale si risolve ricordando che, in generale, $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx}dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$ (integrale gamma).

(c) Si verifica ricordando che, per modelli regolari $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{N}(\tilde{\theta}, I_B^{-1})$ dove $\tilde{\theta}$ è la moda a posteriori e I_B è l'informazione bayesiana. Svolgendo i calcoli (vedi dispensa), si verifica che $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}$ e che $I_B = \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}-1}$.

(d) $\widetilde{C} = \tilde{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} I_B^{-1/2}$; $\mathbb{P}(\Theta > \delta|\mathbf{z}_n) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\delta-\tilde{\theta}}{I_B^{-1/2}}\right)$.

(e) Porre: $\texttt{al} = 2, \texttt{be} = 3, \texttt{n} = 20, \texttt{sn} = 2, \texttt{gg} = 0.05, \texttt{delta} = 5$ da cui
$\texttt{al.p} = \texttt{al} + \texttt{n} = 22, \texttt{be.p} = \texttt{be} + \texttt{sn} = 5$ e quindi
$\texttt{th.tilde} = (\texttt{al.p} - 1)/\texttt{be.p} = 4.2$ e $\texttt{sd.tilde} = \texttt{sqrt}((\texttt{al.p} - 1)/\texttt{be.p}^2) = 0.916$.
Si ottiene $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n] = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = 4.4$;
$\widetilde{C} = [2.403, 5.996]$;
$\mathbb{P}(\Theta > \delta|\mathbf{z}_n) \approx 1 - \texttt{pnorm}(\texttt{delta}, \texttt{th.tilde}, \texttt{sd.tilde}) = 0.191$.

7. Per m v.a. Y_i di un esperimento futuro, indipendenti ed identicamente distribuite condizionatamente a θ, si assuma che $Y_i|\theta \sim \text{N}(\theta, \sigma^2)$. Il *successo* dell'esperimento consiste nel rifiutare l'ipotesi nulla del sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$, utilizzando il test basato sulla regione di rifiuto

$$R = \left\{\mathbf{y}_n : \frac{\sqrt{m}(\overline{y}_m - \theta_0)}{\sigma} > z_{1-\alpha}\right\},$$

dove $\overline{y}_m = \sum_{i=1}^m y_i/m$ è la media campionaria delle osservazioni. Si supponga che $\Theta \sim \text{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right)$. Assumere $\theta_0 = 3$ e $\sigma^2 = 1$.

(a) Fornire l'espressione (non serve fare i calcoli) della distribuzione predittiva *a priori* di $\overline{Y}_m$ e della corrispondente probabilità che l'esperimento sia un successo.

(b) Supponendo di avere osservato un campione di dimensione n di v.a. X_i con distribuzione $\text{N}(\theta, \sigma^2)$ e i.i.d. condizionatamente a θ, fornire l'espressione della distribuzione predittiva *a posteriori* di $\overline{Y}_m$ e della corrispondente probabilità che l'esperimento sia un successo.

(c) Calcolare la probabilità predittiva a priori di successo per $n_0 = 5$, $\mu_0 = 2$, $m = 6$, $\alpha = 0.05$.

(d) Calcolare la probabilità predittiva a posteriori di successo per $n_0 = 5$, $\mu_0 = 2$, $m = 6$, $\alpha = 0.05$, $n = 10$, $\overline{x}_n = 4$.

(e) Con i dati assegnati, calcolare l'intervallo di previsione a posteriori per $\overline{Y}_m$ di livello $1-\gamma = 0.95$.

Soluzione.

(a) $\overline{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma^2_{pr.o}\right)$ con $\sigma^2_{pr.0} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{m}\right)$, varianza predittiva a priori.
Probabilità a priori di successo:
$\mathbb{P}_\theta \left(\overline{Y}_m > \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{A-\mu_0}{\sigma_{pr.o}}\right)$, con $A = \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} z_{1-\alpha}$.

(b) $\overline{Y}_m | \mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu_{pr}, \sigma^2_{pr}\right)$, con $\mu_{pr} = \mu_p = \frac{n_0\mu_0 + n\overline{x}_n}{n_0+n}$ e $\sigma^2_{pr} = \sigma^2\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n_0+n}\right]$ valore atteso e varianza predittive a posteriori.
Probabilità a posteriori di successo:
$\mathbb{P}_\theta \left(\overline{Y}_m > \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} z_{1-\alpha} | \mathbf{z}_n\right) = 1 - \Phi\left(\frac{A-\mu_p}{\sigma_{pr}}\right)$.

(c) Porre: $\mathtt{n0} = 5, \mathtt{mu0} = 2, \mathtt{m} = 6, \mathtt{n} = 10, \mathtt{xmed} = 4, \mathtt{th0} = 3, \mathtt{sig2} = 1, \mathtt{al} = 0.05$.
Si ottiene $\mathtt{A} = 3.67, \mathtt{sig2.pr.0} = 0.366, \mathtt{mu.pr} = 3.333, \mathtt{sig2.pr} = 0.233$
- Probabilità a priori di successo: $1 - \mathtt{pnorm}((\mathtt{A} - \mathtt{mu0})/\mathtt{sig.pr.0}) = 0.002$

(d) Si ottiene $\mathtt{mu.pr} = 3.333, \mathtt{sig2.pr} = 0.233$
- Probabilità a posteriori di successo: $1 - \mathtt{pnorm}((\mathtt{A} - \mathtt{mu.pr})/\mathtt{sig.pr}) = 0.241$

(e) Intervallo di previsione a posteriori: $\mu_{pr} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{pr} = [2.386, 4.280]$

8. Sia $X_1, \ldots, X_n | \theta \sim \mathrm{Pois}(\theta)$ e $\Theta \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$.

(a) Determinare la distribuzione a posteriori di Θ, valore atteso e varianza.
(b) Determinare l'espressione dell'insieme ET (equal-tails) per Θ di livello $1 - \gamma$.
(c) Calcolare esplicitamente $\tilde{\theta}$, il punto di massimo (moda) della densità a posteriori.
(d) Determinare l'informazione bayesiana I_B e l'approssimazione normale per la densità a posteriori di Θ.
(e) Determinare l'espressione generica della probabilità che Θ appartenga all'intervallo $[\theta_L, \theta_U]$ (usare approssimazione normale).
(f) Determinare $\tilde{C}$, l'insieme HPD di livello γ per θ (usare approssimazione normale).
(g) Determinare l'espressione del fattore di Bayes $B_{01}(\mathbf{z}_n)$ per il confronto tra le ipotesi $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \Theta > \theta_0$.
(h) Sapendo che $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $n = 20$, $\sum_{i=1}^n x_i = 10$, γ=0.95, calcolare $\tilde{\theta}$, I_B e gli estremi dell'insieme $\tilde{C}$.
(i) Determinare l'espressione della funzione di densità di $\Psi = \Theta^{-1}$.

Soluzione.

(a) • $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{Ga}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = \alpha + s_n$, $\overline{\beta} = \beta + n$ e $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
• $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ e $\mathbb{V}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}^2}$ (usare integrale gamma verifica analitica; vedi libro/dispense).

(b) $C = [q_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{z}_n), q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{z}_n)]$, dove $q_\epsilon(\mathbf{z}_n)$ indica il generico quantile della densità a posteriori di Θ, il cui valore numerico si determina con la funzione `qgamma(p,shape1,shape2)` di `R`.

(c) $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}$ (vedi dispense per derivazione analitica).

(d) $I_B = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}^2}$ (vedi dispense per derivazione analitica); $\Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \text{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}, \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}^2}\right)$.

(e) $\mathbb{P}\left(\theta_l \leq \Theta \leq \theta_U\right) \approx \Phi\left(\frac{\theta_U - \tilde{\theta}}{\sqrt{I_B^{-1}}}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_L - \tilde{\theta}}{\sqrt{I_B^{-1}}}\right)$.

(f) $\tilde{C} = \tilde{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}}\, I_B^{-1/2}$.

(g) $B_{01}(\mathbf{z}_n) = \frac{\mathbb{F}(\theta_0|\mathbf{z}_n)}{1-\mathbb{F}(\cdot|\mathbf{z}_n)}$, con $\mathbb{F}(\cdot|\mathbf{z}_n)$ funzione di ripartizione della v.a. $\text{Ga}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$.

(h) $\tilde{\theta} = 1.571$, $I_B = 8.909$, $\tilde{C} = [0.914, 2.228]$.

(i) Ricordare che, se $\psi = g(\theta)$, con g invertibile, si ha $\pi_\Psi(\psi) = \pi_\Theta(g^{-1}(\psi))|\frac{d}{d\psi}g^{-1}(\psi)|$. Poichè qui abbiamo che $g^{-1}(\psi) = \frac{1}{\psi}$, per la distribuzione a priori si ottiene $\pi_\Psi(\psi)\frac{\alpha^{\overline{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\psi^{\alpha+1}}\text{e}^{-\beta/\psi}, \quad \psi > 0$. Per la densità a posteriori sostituire α e β con $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$.

9. Sia $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \text{N}(\mu_0, \theta)$ (μ_0 noto) e $\Theta \sim \text{InvGa}(\alpha, \beta)$. Determinare quanto richiesto di seguito.

(a) Distribuzione a posteriori di Θ.
(b) Espressione della funzione di densità, il valore atteso e la varianza di $\Psi = \Theta^{-1}$.
(c) Il punto di massimo (moda) $\tilde{\theta}$ della densità a posteriori di Θ (calcolare esplicitamente $\tilde{\theta}$ utilizzando la densità a posteriori di Θ).
(d) Informazione bayesiana I_B e l'approssimazione normale per la densità a posteriori di Θ.
(e) Espressione generica della probabilità che Θ sia minore di θ_0 (usare approssimazione normale e assumere che $\theta_0 > 0$).
(f) Espressione di $\widetilde{C}$, l'insieme HPD di livello $1-\gamma$ per θ (usare approssimazione normale).

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) \propto \theta^{-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{nS_0^2}{2\theta}}$; $\pi(\theta) \propto \theta^{-\alpha+1} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\theta}}$. Si ha quindi che $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{-\overline{\alpha}+1} \mathrm{e}^{-\frac{\overline{\beta}}{\theta}}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + n/2$ e $\overline{\beta} = \beta + nS_0^2/2$. Quindi $\Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \mathrm{InvGa}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$.

(b) $\Psi \dot{\sim} \mathrm{InvGa}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$; densità, valore atteso e varianza sono noti (vedi libro/dispense). Per la distribuzione a posteriori sostituire α e β con $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$.

(c) $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}+1}$; $I_B = \frac{(\overline{\alpha}+1)^3}{\overline{\beta}^2}$; $\Theta \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\beta}}{\alpha+1}, \frac{\overline{\beta}^2}{(\overline{\alpha}+1)^3}\right)$. Per le derivazioni analitiche vedi dispense.

(d) $\mathbb{P}(\Theta < \theta_0|\mathbf{z}_n) \approx \Phi\left(\frac{\theta_0 - \tilde{\theta}}{\sqrt{I_B^{-1}}}\right)$.

(e) $\tilde{C} = \tilde{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} I_B^{-1/2}$.

10. Sia $X_1, \dots, X_n|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ i.i.d. e $\Theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0})$. Considerare un campione futuro di dimensione m da $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ e sia $\overline{Y}_m$ la corrispondente media campionaria. Determinare quanto richiesto di seguito.

(a) Valore atteso, varianza e distribuzione predittiva a priori di $\overline{Y}_m$.
(b) Valore atteso, varianza e distribuzione predittiva a posteriori di $\overline{Y}_m$.
(c) lntervallo di previsione a priori per $\overline{Y}_m$, assumendo che $\sigma^2 = 1$, $n_0 = 5$, $m = 3$, $\mu_0 = 2$.
(d) Intervallo di previsione a posteriori per $\overline{Y}_m$, assumendo che $n = 20$ e $\overline{x}_n = 0.5$.
(e) Intervallo di previsione a posteriori per $\overline{Y}_m$ nel caso di distribuzione iniziale non informativa.

Soluzione.

(a) Distribuzione predittiva a priori: $\overline{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma^2_{pr.o}\right)$ con $\sigma^2_{pr.0} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{m}\right)$.

(b) Distribuzione predittiva a posteriori: $\overline{Y}_m|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu_{pr}, \sigma^2_{pr}\right)$, con $\mu_{pr} = \mu_p = \frac{n_0\mu_0 + n\overline{x}_n}{n_0+n}$ e $\sigma^2_{pr} = \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n_0+n}\right)$.

(c) Intervallo di previsione a priori: $\mu_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{pr.o}$.

(d) Intervallo di previsione a posteriori: $\mu_{pr} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{pr}$.

(e) Si ottiene dall'intervallo ottenuto nel punto precedente, ponendo $n_0 = 0$, ovvero ponendo $\mu_p = \mu_0$ e $\sigma^2_{pr} = \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$.

11. Siano $X_1, ..., X_n|\theta \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ i.i.d., con valore atteso $\mathbb{E}_\theta[X] = \frac{1}{\theta}$, $\mathbb{V}_\theta[X] = \frac{1-\theta}{\theta^2}$ e funzione di massa di probabilità

$$p_\theta(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, 3, \dots \qquad \theta \in [0, 1].$$

(a) Determinare la funzione di verosimiglianza e la stima di massima verosimiglianza $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n)$ del parametro θ.
(b) Verificare che la famiglia delle densità $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$, è coniugata al modello in esame e determinare i parametri $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ della distribuzione a posteriori di Θ, $\pi(\theta|\mathbf{z}_n)$.

(c) Determinare di $\widehat{\theta}_B(\mathbf{z}_n) = \mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n]$.

(d) Determinare analiticamente l'espressione di $\tilde{\theta}(\mathbf{z}_n)$, moda della distribuzione a posteriori di Θ.

(e) Verificare che, per valori elevati di n, si ha che $\tilde{\theta}(\mathbf{z}_n) \approx \widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n)$.

(f) Supponendo che il campione abbia dimensione $n = 5$, che $\alpha = \beta = 2$ e che $\sum_{i=1}^n x_i = 15$, calcolare il valore numerico di $\widehat{\theta}_B(\mathbf{z}_n)$, $\tilde{\theta}(\mathbf{z}_n)$ e di $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n)$.

Soluzione.

(a) • $\ell(\theta) = (1-\theta)^{s_n - n}\theta^n$, con $\theta \in (0,1)$ e $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$.
• $\widehat{\theta}_{mv} = \frac{n}{s_n} = \frac{1}{\overline{x}_n}$.

(b) Pertanto, ricordando che $\pi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$, si ha che $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{\overline{\alpha}-1}(1-\theta)^{\overline{\beta}-1}$, con $\overline{\alpha} = \alpha + n$ e $\overline{\beta} = \beta + s_n - n$.

(c) Rislolvere l'equazione $\frac{d}{d\theta} \ln \pi(\theta|\underline{\ }) = 0$ e verificare che $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2} = \frac{\alpha+n-1}{\alpha+\beta+s_n-2}$.

(d) Per n elevato $\tilde{\theta} = \frac{\alpha+n-1}{\alpha+\beta+s_n-2} \approx \frac{n}{s_n} = \frac{1}{\overline{x}_n}$.

(e) $\widehat{\theta}_B(\mathbf{z}_n) = 0.368$; $\tilde{\theta}(\mathbf{z}_n) = 0.352$; $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n) = 0.333$.

12. Si consideri il modello del precedente esercizio

(a) Determinare l'espressione di $I_B(z)$ (Informazione bayesiana).

(b) Verificare che, per n sufficientemente elevato, si ha che

$$\Theta|z \,\dot\sim\, \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2}, \frac{(\overline{\alpha}-1)(\overline{\beta}-1)}{(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2)^3}\right).$$

(c) Basandosi sull'approssimazione normale della distribuzione a posteriori, determinare l'espressione di $\widetilde{C}(\mathbf{z}_n)$ di livello $1-\gamma$, insieme HDP per θ.

(d) Basandosi sull'approssimazione normale della distribuzione a posteriori, calcolare l'espressione della probabilità che $\Theta < 1/2$, in funzione di $\Phi(\cdot)$, funzione di ripartizione della v.a. $\mathrm{N}(0,1)$.

(e) Supponendo che il campione abbia dimensione $n = 20$, che $\alpha = \beta = 2$ e che $\sum_{i=1}^n x_i = 50$, determinare gli estremi di $\widetilde{C}(\mathbf{z}_n)$ (assumere $\gamma = 0.05$).

(f) Con gli stessi dati del punto precedente, calcolare $\mathbb{P}[\Theta < 1/2|\mathbf{z}_n]$.

Soluzione.

(a) Per ottenere I_B si osservi che

$$\frac{d}{d\theta}\ln\pi(\theta|\mathbf{x}_n) = \frac{\overline{\alpha}-1}{\theta} - \frac{\overline{\beta}-1}{1-\theta},$$

da cui si ottiene che il punto di massimo per $\ln\pi(\theta|\mathbf{x}_n)$ e per $\pi(\theta|\mathbf{x}_n)$ è $\tilde{\theta} = (\overline{\alpha}-1)/(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2)$. Quindi

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{d^2}{d\theta^2}\ln\pi(\theta|\mathbf{x}_n) \\ &= \frac{\overline{\alpha}-1}{\theta^2} + \frac{\overline{\beta}-1}{(1-\theta)^2}|_{\theta=\tilde{\theta}} \\ &= \frac{(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2)^2}{\overline{\alpha}-1} + \frac{(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2)^2}{\overline{\beta}-1} \\ &= \frac{(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-1)^3}{(\overline{\alpha}-1)(\overline{\beta}-1)}. \end{aligned}$$

(b) Abbiamo quindi che

$$\Theta|\mathbf{x}_n \,\dot{\sim}\, \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2}, \frac{(\overline{\alpha}-1)(\overline{\beta}-1)}{(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-1)^3}.\right) \tag{2}$$

(c) $\widetilde{C} = \tilde{\theta} \,\pm\, z_{1-\frac{\gamma}{2}}\, I_B^{-1/2}$. Sostituire le espressioni ottenute sopra per $\tilde{\theta}$ e I_B.

(d) $\mathbb{P}\left(\Theta < \frac{1}{2}|\mathbf{z}_n\right) \approx \Phi\left(\frac{\delta-\tilde{\theta}}{\sqrt{I_B^{-1}}}\right)$. Sostituire le espressioni ottenute sopra per $\tilde{\theta}$ e I_B.

(e) $\tilde{\theta} = 0.403$, $I_B = 215.987$. Pertanto $\widetilde{C} = [0.270, 0.537]$.

(f) $\mathbb{P}\left(\Theta < \frac{1}{2}|\mathbf{z}_n\right) \approx 0.921$.

13. Si consideri il modello dei precedenti esercizi ed il parametro $\lambda = \frac{1}{\theta}$.

(a) Determinare $\widehat{\lambda}_{mv}(\mathbf{z}_n)$, stima di massima verosimiglianza di λ.

(b) Verificare che

$$\widehat{\lambda}_{mv}(\mathbf{Z}_n)|\theta \,\dot{\sim}\, \mathrm{N}\left(\lambda, \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}\right).$$

Soluzione.

(a) Per equivarianza degli stimatori di massima verosimiglianza si ha che $\widehat{\lambda}_{mv}(\mathbf{Z}_n) = \overline{X}_n$.

(b) Per il teorema del limite centrale si ha che $\widehat{\lambda}_{mv}(\mathbf{Z}_n) = \overline{X}_n|\theta \sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1-\theta}{n\theta^2}\right) = \mathrm{N}\left(\lambda, \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}\right)$

14. Sia $\mathbf{Z}_n = (X_1, ..., X_n)$ un campione in cui le v.a X_i sono, condizionatamente a θ, i.i.d. con distribuzione $\mathrm{EN}(\theta)$, ovvero con funzione di densità

$$f_{X_i}(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \qquad x \geq 0, \qquad \theta > 0.$$

Si consideri inoltre per Θ la famiglia delle densità Gamma(α, β) coniugata al modello, $\alpha, \beta > 0$.

(a) Determinare le distribuzioni a posteriori di Θ e della v.a. $\Lambda = \Theta^{-1}$.

(b) Considerare due costanti reali a, b e calcolare $\mathbb{E}[a\Lambda + b|\mathbf{z}_n]$.

(c) Calcolare $\tilde{\theta}(\mathbf{z}_n)$, la moda della distribuzione a posteriori di Θ.

(d) Calcolare l'informazione bayesiana I_B.

(e) Determinare le generiche espressioni di $\mathbb{P}[\Theta > \delta|\mathbf{z}_n]$ utilizzando la distribuzione a posteriori di Θ esatta e l'approssimazione normale.

Soluzione.

(a) $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{Ga}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$ e $\Lambda|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{InvGa}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$ con $\overline{\alpha} = \alpha + n$ e $\overline{\beta} = \beta + s_n$, $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$.

(b) $\mathbb{E}(\Lambda) = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}-1}$ (vedi dispense per verifica analitica); pertanto $\mathbb{E}(a\Lambda + b|\mathbf{z}_n) = a\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}-1} + b$.

(c) $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}$ (vedi dispense per verifica analitica).

(d) $I_B = \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}-1}$.

(e) • $\mathbb{P}(\Theta > \delta|\mathbf{z}_n) = 1 - \mathbb{F}(\delta|\mathbf{z}_n)$, dove $\mathbb{F}(\cdot|\mathbf{z}_n)$ è la funzione di ripartizione della v.a. $\mathrm{Ga}(\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$.

• $\mathbb{P}(\Theta > \delta|\mathbf{z}_n) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\delta - \tilde{\theta}}{\sqrt{I_B^{-1}}}\right)$.

15. Assume that:

- $X|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$,
- $\Theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0})$.

Compute $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$.

Soluzione. Dai risultati su analisi predittiva per campioni casualidi dimensione n da modello normale, ponendo $n = 1$ si ha che $X \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma^2_{pr.o}\right)$, con $\sigma^2_{pr.o} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_0} + 1\right)$. Pertanto $f_X(x) = \frac{1}{\sigma_{pr.0}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_{pr.o}}(x - \mu_0)^2, \right\} \quad x \in \mathbb{R}$.

16. Assume that:

- $X|\theta \sim \mathrm{EN}(\theta)$,
- $\Theta \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$.

Determine $\mathbb{E}[X]$, dove $\mathbb{E}(\cdot)$ indica il valore atteso rispetto alla distribuzione marginale di X.

Soluzione. Indichiamo con $\mathbb{E}_\Theta(\cdot)$ e $\mathbb{E}_{X|\theta}(\cdot)$ rispattivamente il valore atteso rispetto alla distribuzione marginale di Θ (ovvero rispetto alla distribuzione a priori) e il valore atteso rispetto alla distribuzione campionaria di X.
Si ha allora che

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{X|\theta}(X)] = \mathbb{E}_\Theta\left(\frac{1}{\Theta}\right) = \frac{\beta}{\alpha-1},$$

dove l'ultima uguaglianza è vera in quanto $\frac{1}{\Theta} \sim \text{InvGa}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$.

17. Assume that:

- $X_1, \ldots, X_m|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d.
- $\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$
- $H_m = \sum_{i=1}^m Y_i$ (future data)

Determine $\mathbb{E}[H_m]$ (predictive expected value).

Soluzione. Per la linearità del valore atteso si ha che $\mathbb{E}(H_m) = m\mathbb{E}(Y_i)$. Poichè $\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{Y_i|\theta}(Y_i)] = \mathbb{E}_\Theta(\Theta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, abbiamo che $\mathbb{E}(H_m) = \frac{m\alpha}{\alpha+\beta}$

18. Assume that:

- $X_1, \ldots, X_m|\theta \sim \text{Pois}(\theta)$ i.i.d.
- $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$
- $H_m = \sum_{i=1}^m Y_i$ (future data).

Determine $\mathbb{E}[H_m]$ and $\mathbb{V}[H_m]$(predictive expected value and variance).

Soluzione.

- $\mathbb{E}(H_m) = m\mathbb{E}(Y_i) = m\mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{Y_i|\theta}(X|\theta)] = m\mathbb{E}_\Theta(\Theta) = \frac{m\alpha}{\beta}$
- Ricoradando che $H_m|\theta \sim \text{Pois}(m\theta)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(H_m) &= \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{V}_{H_m|\theta}(H_m)] + \mathbb{V}_\Theta[\mathbb{E}_{H_m|\theta}(H_m)] \\
&= \mathbb{E}_\Theta(m\Theta) + \mathbb{V}_\Theta(m\Theta) \\
&= \frac{m\alpha}{\beta} + \frac{m^2\alpha}{\beta^2} \\
&= \frac{m\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{m}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

19. Compute the expressions of the Bayes factor $B_{01}(\mathbf{z}_n)$ for the three hypotheses testing problems (point-null vs- point null, point-null vs. two-sided, one-sided vs. one sided)for the Normal-Normal model.

Soluzione. Ricordare che $\overline{X}|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2/n)$, $X \sim \mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2(n_0^{-1} + n^{-1}))$, $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}((n_0\mu_0 + n\overline{x})/(n_0 + n)), \sigma^2/(n_0 + n))$, dove $\overline{\mu}_p = \mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = (n_0\mu_0 + n\overline{x})/(n_0 + n)$, $\overline{\sigma}_p^2 = \mathbb{V}[\Theta|\mathbf{x}_n] = \sigma^2/(n_0 + n)$. Si ha allora quanto segue.

A. *Ipotesi puntuali.* Indicando con $\phi(z; a, b)$ il valore della funzione di densità della v.a. $\mathrm{N}(a, b)$ calcolata in $z \in \mathbb{R}$, abbiamo che $B_{01}(\overline{x}) = \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\phi(\overline{x};\theta_0,\sigma^2/n)}{\phi(\overline{x};\theta_1,\sigma^2/n)}$. Con semplici calcoli si mostra che $B_{01}(\mathbf{x}_n) = \exp\left\{-\frac{n(\theta_1-\theta_0)}{\sigma^2}(\overline{x} - \overline{\theta})\right\}$, dove $\overline{\theta} = (\theta_0 + \theta_1)/2$.

B. *Ipotesi nulla puntuale e ipotesi alternativa bilaterale.* In questo caso è semplice verificare che $m_0(\overline{x}) = \phi(\overline{x}; \theta_0, \sigma^2/n)$ e $m_1(\overline{x}) = m(\overline{x}) = \phi(\overline{x}; \mu_0, \sigma^2(1/n_0 + 1/n))$. Con alcuni calcoli si ottiene $B_{01}(\overline{x}) = \left(\frac{n_0+n}{n_0}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\frac{n}{n_0+n}\right\}$, dove $u = \sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0)/\sigma$.

C. *Ipotesi unilaterali.* Si verifica facilmente che $B_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\Phi\left(\frac{\theta_0-\overline{\mu}_p}{\overline{\sigma}_p}\right)/\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_0-\overline{\mu}_p}{\overline{\sigma}_p}\right)\right]}{\Phi\left(\frac{\theta_0-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right)/\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_0-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right)\right]}$, dove $\Phi(\cdot)$ indica la funzione di ripartizione della v.a. $\mathrm{N}(0, 1)$.

20. Si considerino i modelli statistici per le seguenti v.a. (a) $\mathrm{Ber}(\theta)$; (b) $\mathrm{Pois}(\theta)$, $\mathrm{Exp}(\theta)$, $\mathrm{N}(\theta, \sigma_0^2)$, $\mathrm{N}(\mu_0, \theta)$. Per ciascuno dei modelli considerati determinare quanto richiesto.

    (a) Determinare informazione attesa di Fisher e limite inferiore di Cramer Rao ($\mathtt{cr}(\theta)$) per gli stimatori di massima verosimiglianza di θ, che sono anche stimatori UMVUE dei parametri dei singoli modelli (con varianza esattamente uguale a $\mathtt{cr}(\theta)$).

    (b) Determinare $\pi^J(\theta)$, la distribuzione a priori di Jeffreys per θ.

    (c) Determinare la distribuzione a posteriori di θ utilizzando la distribuzione di Jeffreys. Indicare la famiglia coniugata per il modello e a quali valori devono essere uguali o devono tendere gli iperparametri affinchè le distribuzioni a posteriori risultanti coincidano con le distribuzioni a posteriori ottenute dalle distribuzioni di Jeffreys.

Soluzione.

(a)
- Bernoulli: $\mathrm{cr}(\theta) = \mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \Rightarrow \pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$ (propria).
- Poisson: $\mathrm{cr}(\theta) = \mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{\theta}{n} \Rightarrow \pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ (impropria).
- Esponenziale: $\mathrm{cr}(\theta) = \mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ (impropria).
- Normale $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ (N1): $\mathrm{cr}(\theta) = \mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \pi^J(\theta) \propto 1$ (impropria).
- Normale $\mathrm{N}(\mu_0, \theta)$ (N3): $\mathrm{cr}(\theta) = \mathbb{V}_\theta(S_0^2) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{2\theta^2}{n} \Rightarrow \pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ (impropria).

NB: in tutti i casi lo stimatore di massima verosimiglianza è anche UMVUE di parametro di modello di famiglia esponenziale uniparametrica. Pertanto la varianza dello stimatore coincide con $\mathrm{cr}(\theta) = I_n^{-1}(\theta)$. Possiamo quindi ottenere $I_n(\theta)$ dalla varianza dello stimatore UMVUE senza fare i calcoli.

(b) Vedi punto precedente.

(c)
- Bernoulli: $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \mathrm{Beta}(\theta|\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = s_n + 1/2, \overline{\beta} = n - s_n + 1/2$. Si ottiene dalla distribuzione a posteriori ottenuta usando una densità a priori coniugata Beta di parametri per $\alpha = \beta = 1/2$ (propria).
- Poisson: $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \mathrm{Ga}(\theta|\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = s_n + 1/2, \overline{\beta} = n$. Si ottiene dalla distribuzione a posteriori ottenuta usando una densità a priori Beta per $\alpha = 1/2$ e con $\beta \to 0$ (impropria).
- Esponenziale: $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \mathrm{InvGa}(\theta|\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = n, \overline{\beta} = s_n$. Si ottiene dalla distribuzione a posteriori ottenuta usando una densità a priori InvGa per $\alpha \to 0$ e $\beta \to 0$ (impropria).
- N1: $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \mathrm{N}\left(\overline{x}_n, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, Si ottiene dalla distribuzione a posteriori ottenuta usando una densità a priori $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/n_0)$ per $n_0 \to 0$ (impropria).
- N3: $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \mathrm{InvGa}(\theta|\overline{\alpha}, \texttt{rate} = \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = \frac{n}{2}, \overline{\beta} = \frac{n}{2}S_0^2$. Si ottiene dalla distribuzione a posteriori ottenuta usando una densità a priori InvGa per $\alpha \to 0$ e $\beta \to 0$ (impropria).

21. Rispondere ai seguenti quesiti.

(a)
- $X_1, \ldots, X_n|\mu, \sigma^2 \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ i.i.d.
- $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \qquad S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}$
- $Y = a\overline{X}_n + bS_n^2, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Calcolare $\mathbb{E}_\theta[Y]$ e $\mathbb{V}_\theta[Y]$ (rispetto alla distribuzione campionaria).

(b)
- $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{N}(\mu, \theta)$ i.i.d.
- $\Theta \sim \mathrm{IGa}(\alpha, \beta)$
- $\mathbb{E}[\Theta] = m$, $\mathbb{V}[\Theta] = v$.

Determinare $\mathbb{E}[S_n^2]$ e $\mathbb{V}[S_n^2]$, ovvero valore atteso predittivo a priori e varianza predittiva a priori di S_n^2 (in funzione di n, m, v).

Soluzione.

(a) • $\mathbb{E}_\theta(Y) = a\mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n) + v\mathbb{E}_\theta(S_n^2) = a\mu + b\sigma_n^2$

• Dall'indipendenza di $\overline{X}_n$ e S_n^2 nel modello normale, discende che $\mathbb{V}_\theta(Y) = a^2\mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) + b^2\mathbb{V}_\theta(S_n^2) = a^2\frac{\sigma^2}{n} + b^2\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

(b) • $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{S_n^2|\theta}(S_n^2)] = \mathbb{E}_\Theta(\Theta) = m$.

• $\mathbb{V}(S_n^2) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{V}_{S_n^2|\theta}(S_n^2)] + \mathbb{V}_\Theta[\mathbb{E}_{S_n^2|\theta}(S_n^2)] = \mathbb{E}_\Theta\left(\frac{2\theta^2}{n-1}\right) + \mathbb{V}_\theta(\Theta) = \frac{2}{n-1}(v+m^2) + v$.

22. Sia $X_1, \dots, X_n|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d. (non è richiesto di svolgere i calcoli per trovare $I_n(\theta)$).

(a) Determinare $\pi^J(\theta)$, distribuzione a priori di Jeffreys per Θ.

(b) Determinare la distribuzione a posteriori $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$.

(c) Determinare $\pi_\Psi^J(\psi|\mathbf{z}_n)$ per la trasformazione $\psi = g(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$.

Soluzione.

(a) $\mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \text{cr}(\theta) = I_n(\theta)^{-1}$ (modello famiglia esponenziale uniparametrica $\Longrightarrow$ varianza stimatore UMVUE coincide con limite interiore di Cramer-Rao). Pertanto $\pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$.

(b) $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \text{Beta}(\theta|\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = s_n + 1/2, \overline{\beta} = n - s_n + 1/2$.

(c) Ricordare che, se $Y = g(X)$ con g invertibile, allora $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \times |\frac{d}{dy}g^{-1}(y)|$. Nel caso in esame, da $\psi = g(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$ segue che $\theta = g^{-1}(\psi) = \frac{\psi}{1+\psi}$, $\psi \geq 0$. Si ottiene quindi che $\pi_\Psi(\psi) = \pi_\Theta^J(g^{-1}(\psi)) \times |\frac{d}{d\psi}g^{-1}(\psi)|$ e quindi (calcoli)

$\pi_\Psi(\psi) = \frac{1}{B(\overline{\alpha},\overline{\beta})} \frac{\psi^{\overline{\alpha}-1}}{(1+\psi)^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}}$, $\psi \geq 0$

23. Sia $X_1, \dots, X_n|\theta \sim \text{N}(\theta, 1)$ i.i.d. e $\Theta \sim \text{N}(0, n_0^{-1})$. Considerare il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta \neq 0$. Calcolare l'espressione di $B_{01}(\overline{x}_n)$ per $\overline{x}_n = 0$.

Soluzione. Ricordare che, se $\overline{X}_n|\theta \sim \text{N}(\theta, \sigma^2/n)$ e $\Theta \sim \text{N}(\mu_0, \sigma^2/n_0)$, allora, per il sistemna di ipotesi considerato, $B_{01}(\overline{x}_n) = \frac{p_{\theta_0}^{\overline{X}_n}(\overline{x}_n)}{m^{\overline{X}_n}(\overline{x}_n)}$, dove $p_{\theta_0}^{\overline{X}_n}(\overline{x}_n) = \phi(\overline{x}_n|\theta_0, \sigma^2/n)$ e $m^{\overline{X}_n}(\overline{x}_n) = \phi(\overline{x}_n|\mu_0, \sigma_{pr.o}^2)$ con $\sigma_{pr.o}^2 = \sigma^2(1/n_0 + 1/n)$ e dove, in generale, $\phi(x|a, b)$ indica il valore in x della funzione di densità di una v.a. $\text{N}(a, b)$. Ponendo $\mu_0 = 0$ e $\sigma^2 = 1$ si ottiene $B_{01}(\overline{x}_n)|_{\overline{x}_n=0} = \left(\frac{n+n_0}{n_0}\right)^{1/2}$.

24. Sia $X_1, \dots, X_n|\theta \sim \text{Beta}(\theta, 1)$ i.i.d., con $p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0, 1)$, $\theta > 0$.

(a) Determinare $\pi^J(\theta)$, distribuzione a priori di Jeffreys per Θ.

(b) Determinare la densità a posteriori $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$.

(c) Determinare $\tilde{\theta}$ (moda a posteriori) e $\tilde{I}_B$ (informazione bayesiana).

(d) Scrivere l'espressione dell'insieme *equal-tails* (ET) di livello $1-\gamma$ per θ, basato sull'approssimazione normale della distribuzione a posteriori di Θ.

Soluzione.

(a) $\pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$, $\theta > 0$ (impropria). Infatti si verifica facilmente che $\ell(\theta) \propto \theta^n t^\theta$, con $t = \prod_{i=1}^n x_i$ e quindi che $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$.

(b) $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{n-1} t^{\theta-1}$, $\theta > 0$.

(c) $\tilde{\theta} = -\frac{n-1}{\ln t}$. $I_B = \frac{n-1}{\theta^2}|_{\theta=\tilde{\theta}} = \frac{(\ln t)^2}{n-1}$. $\Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \text{N}\left(\tilde{\theta}, I_B^{-1}\right)$ (sostituire le espressioni trovate per $\tilde{\theta}$ e I_B).

(d) $\widetilde{C} = \tilde{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_B^{-1}}$ (sostituire le espressioni trovate per $\tilde{\theta}$ e I_B).

25. Sia $X|\theta \sim \text{EN}(\theta)$ i.i.d. e $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$.

(a) Determinare l'espressione di $m(x)$, distribuzione predittiva a priori della v.a. X.

(b) Calcolare il valore atteso di X e stabilire per quali valori di α e β tale valore esiste.

(c) Calcolare il valore della densità marginale $m(x)$ di X in $x = 1$ che si ottiene ponendo $\alpha = \beta = 1$.

(d) Calcolare con $m(x)$ la probabilità dell'evento $(X < 1)$ che si ottiene ponendo $\alpha = \beta = 1$.

Soluzione.

(a) $m(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}$, $x \geq 0$. Si verifica ricordando che, per $a, b > 0$, si ha $\int_0^\infty y^{a-1}e^{-by}dy = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$ (integrale gamma).

(b) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{X|\theta}(X)] = \mathbb{E}_\Theta\left(\frac{1}{\Theta}\right) = \frac{\beta}{\alpha-1}$, dal momento che $\frac{1}{\Theta} \sim \text{InvGa}(\alpha, \texttt{rate} = \beta)$.

(c) Per $\alpha = \beta = 1$ si ha che $m(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $x \in (0, 1)$. Pertanto $m(1) = \frac{1}{4}$.

(d) Per $\alpha = \beta = 1$ si ha che $\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 m(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\frac{1}{1+x}|_0^1 = \frac{1}{2}$.

26. Siano $Y_1, \ldots, Y_m|\theta \sim \text{N}(\theta, \sigma^2)$ i.i.d. (σ^2 noto) le v.a. associate alle osservazioni di un esperimento futuro e sia $\Theta \sim \text{N}(\mu_0, \sigma^2 n_0^{-1})$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{R}^+$. Riteniamo che l'esperimento abbia `successo` se

$$\mathbb{P}(\Theta < \delta|\mathbf{y}_m) > \gamma, \qquad \gamma \in (0, 1).$$

(a) Verificare che si ha un `successo` se si osserva un campione $\mathbf{y}_m$ che appartiene all'insieme

$$S = \{\mathbf{y}_m : \overline{y}_m < k\},$$

dove $k = k(\delta, \pi, \gamma)$ è una costante che dipende da δ, γ e dagli iperparametri della distribuzione a priori.

(b) Fornire l'espressione di $k(\delta, \pi, \gamma)$.
(**Sugg.:** ricordare che, se F è la funzione di ripartizione della v.a. X, allora $F^{-1}(\epsilon) = q_\epsilon$, $\epsilon \in (0, 1)$.)

(c) Determinare la probabilità predittiva a priori di osservare un campione in S.

Soluzione.

(a) Da $\Theta|\mathbf{y}_m \sim \mathrm{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$ si ha che $\mathbb{P}(\Theta < \delta|\mathbf{y}_m) = \Phi\left(\frac{\delta-\mu_p}{\sigma_p}\right)$. Quindi $\mathbb{P}(\Theta < \delta|\mathbf{y}_m) = \Phi\left(\frac{\delta-\mu_p}{\sigma_p}\right) > \alpha \Leftrightarrow \Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\delta-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right] > \Phi^{-1}(\gamma) = z_\gamma \Leftrightarrow \mu_p < \delta - \sigma_p z_\gamma$.
Ricordando che $\mu_p = (n_0\mu_0 + m\overline{y}_m)/(n_0 + m)$, l'ultima disuguaglianza è verificata se $\overline{y}_m < m^{-1}[(n_0 + m)(\delta - \sigma_p z_\gamma) - n_0\mu_0]$.

(b) $k(\delta, \pi, \gamma) = m^{-1}[(n_0 + m)(\delta - \sigma_p z_\gamma) - n_0\mu_0]$.

(c) Ricordando che $\overline{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma^2_{pr.o}\right)$, con $\sigma^2_{pr.o} = \sigma^2(1/m + 1/n_0)$, si ha che
$\mathbb{P}[\text{Successo}] = \mathbb{P}(\overline{Y}_m < k) = \Phi\left(\frac{k-\mu_0}{\sigma_{pr.0}}\right)$, con $k = k(\delta, \pi, \gamma)$.

27. Sia $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$ i.i.d. (μ_0 noto), $\theta > 0$.

(a) Determinare $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n)$ e la sua varianza.

(b) Determinare (eseguendo i calcoli necessari) $I_n(\theta)$ e verificare che il suo inverso coincide con la varianza di $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{Z}_n)$.

(c) Determinare $\pi^J(\theta)$, distribuzione a priori di Jeffreys per Θ.

(d) Determinare la distribuzione a posteriori $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$.

(e) Stabilire a quale famiglia di densità appartiene $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$ (dire per quali valori dei parametri).

Soluzione.

(a) Dallo studio di $\ell(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{n/2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta}\right\}$, si ottiene che $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n) = S_0^2$,
con $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$.
Sappiamo che $S_0^2|\theta \sim \mathrm{Ga}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2\theta}\right)$; quindi $\mathbb{V}_\theta(S_0^2) = \frac{2\theta^2}{n}$.

(b) Dallo studio delle derivate di $\ell(\theta)$ (vedi libro/dispense) si trova che $I_n(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}$.
Si noti anche che S_0^2 è UMVUE di modello famiglia esponenziale uniparametrica. La sua varianza è quindi uguale al limite inferiore di Cramer-Rao. Quindi: $I_n(\theta) = [\mathrm{cr}(\theta)]^{-1} = [\mathbb{V}_\theta(S_0^2)]^{-1} = \frac{n}{2\theta^2}$.

(c) $\pi^J(\theta) \propto \sqrt{I_n(\theta)} \propto \frac{1}{\theta}$.

(d) $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{nS_0^2}{2\theta}}$.

(e) $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{InvGa}\left(\frac{n}{2}, \texttt{rate} = \frac{nS_0^2}{2}\right)$.

28. Sia $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \text{Uniforme}[0, \theta]$ i.i.d. ($\theta > 0$). Considerare $\pi(\theta) \propto 1/\theta$.

(a) Verificare che $t = x_{(n)} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ è una statistica sufficiente per il modello.

(b) Verificare che

$$\pi(\theta|t) = \frac{n}{\theta^{n+1}}\, t^n\, I_{[t,\infty]}(\theta).$$

(c) Verificare che
$$\widehat{\theta}_B = \mathbb{E}[\Theta|t] = \frac{n}{n-1}t.$$

(d) Calcolare il valore di $\widehat{\theta}_B$ per il campione $\mathbf{z}_n = (1/2, 1)$.

(e) Utilizzando il campione osservato, determinare l'espressione di $\pi(\theta|t)$ e disegnarne il grafico.

(f) Utilizzando il campione osservato, calcolare $\mathbb{P}(\Theta > 2|t)$.

Soluzione.

(a) $\ell(\theta) = \frac{1}{\theta^n}\ I_{[0,x_{(n)}]}(\theta)$. Per il criterio i fattorizzazione si ha quindi che $t(\mathbf{z}_n) = x_{(n)}$ è statistica sufficiente per il modello.

(b) $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \ell(\theta) \cdot \pi(\theta) = c \cdot \frac{1}{\theta^{n+1}}\ I_{[0,x_{(n)}]}(\theta)$, con $c = \left[\int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+1}} d\theta\right]^{-1}$. Risolvendo l'integrale si trova che $c = nx_{(n)}^n$. Pertanto $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) = \frac{n}{\theta^{n+1}}\ x_{(n)}^n\ I_{[0,x_{(n)}]}$.

(c) $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta \times \frac{n}{\theta^{n+1}}\ x_{(n)}^n d\theta =$ (svolgendo i calcoli) $= \frac{n}{n-1}x_{(n)}$.

(d) $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{z}_n) = 1$.

(e) $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) = \frac{2}{\theta^3}\ I_{[1,\infty]}(\theta)$, da cui, facilmente, il grafico.

(f) $\mathbb{P}(\Theta > 2|\mathbf{z}_n) = \int_2^{\infty} \pi(\theta|\mathbf{z}_n) d\theta = \int_2^{\infty} \frac{2}{\theta^3} d\theta =$ (svolgendo i calcoli) $= \frac{1}{4}$.

29. Sia $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \text{Pois}(\theta)$ i.i.d. , $\theta > 0$.

(a) Determinare $\pi^J(\theta)$ (Jeffreys prior).

(b) Verificare che, utilizzando $\pi^J(\theta)$, si ottiene che $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n)$ è una densità $\text{Gamma}(s_n + 1/2, n)$.

(c) Determinare $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{z}_n]$ e $\mathbb{V}[\Theta|\mathbf{z}_n]$.

(d) Determinare l'approssimazione normale per la distribuzione di $\Theta|\mathbf{z}_n$.

(e) Considerare ora una distribuzione a priori $\text{Gamma}(1, 1)$. Determinare valore atteso e varianza predittivi della statistica $\mathbb{E}[\Theta|\mathbf{Z}_n]$ determinato al punto (c) di questo esercizio.

Soluzione.

(a) $\overline{X}_n$ è UMVUE di modello famiglia esponenziale uniparametrica. La sua varianza è quindi uguale al limite inferiore di Cramer-Rao. Quindi: $I_n(\theta) = [\text{cr}(\theta)]^{-1} = [\mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n)]^{-1} = \frac{n}{\theta}$. Pertanto $\pi^J(\theta) \propto \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.

(b) $\ell(\theta) \propto \theta^{s_n} \mathrm{e}^{-n\theta}$, con $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Quindi $\pi^J(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{(s_n+\frac{1}{2})-1} \mathrm{e}^{-n\theta}$, ovvero $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{Ga}(\overline{\alpha}, \mathtt{rate} = \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = s_n + 1/2$ e $\overline{\beta} = n$.

(c) $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{s_n+1}{2n}$; $\mathbb{V}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}^2} = \frac{s_n+1}{2n^2}$.

(d) Per il modello gamma, moda a posteriori e informazione bayesiana sono rispettivamente uguali a $\tilde{\theta} = \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}$ e $I_B = \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}-1}$. Pertanto $\Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}, \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}^2}\right)$.

(e) $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{Ga}(\overline{\alpha}, \mathtt{rate} = \overline{\beta})$, con $\overline{\alpha} = \alpha + s_n$ e $\overline{\beta} = \beta + n$. Quindi, se $\alpha = \beta = 1$, si ha che $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{s_n+1}{n+1} = T$. Quindi, poichè $\mathbb{E}_\Theta(\Theta) = \mathbb{V}_\Theta(\Theta) = 1$, abbiamo che
$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{E}_{T|\theta}(T)] = 1$;
$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}_\Theta[\mathbb{V}_{T|\theta}(T)] + \mathbb{V}_\Theta[\mathbb{E}_{T|\theta}(T)] = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}. = \frac{n}{n+1}$

30. Sia $X_1, \dots, X_n|\theta$ i.i.d. con

$$p_\theta^X(x) = \theta x^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1), \qquad \theta > 0.$$

Considerare per Θ una distribuzione a priori $\mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. Determinare la distribuzione a posteriori di Θ, il suo valore atteso e la sua varianza.

Soluzione.

- $\ell(\theta) \propto \theta^n t^\theta = \theta^n \mathrm{e}^{\theta \ln t}$, con $t = \prod_{i=1}^n x_i$. Quindi $\pi(\theta|\mathbf{z}_n) \propto \theta^{(\alpha+n)-1} \mathrm{e}^{-\theta(\beta - \ln t)}$. Quindi, ponendo $\overline{\alpha} = \alpha + n$ e $\overline{\beta} = \beta - \ln t$, possiamo dire che $\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{Ga}(\overline{\alpha}, \mathtt{rate} = \overline{\beta})$.
- $\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{\alpha+n}{\beta - \ln t}$.
- $\mathbb{V}(\Theta|\mathbf{z}_n) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}^2} = \frac{\alpha+n}{(\beta - \ln t)^2}$.